Signaux | Chapitre 3 | Cours

S3 · Analyse spectrale

L'étude des signaux harmoniques peut paraître restrictif de prime abord, mais il n'en est rien.

Propriété :

- Tout signal périodique peut s'écrire comme une somme (discrète) de signaux harmoniques.

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_{\text{harm}}(\omega_n, t) \qquad \longleftarrow \textbf{Décomposition en série de Fourier} \text{ de } s(t) \text{ (MPSI)}$$

- Tout signal s'écrire comme une somme (continue) de signaux harmoniques.

$$s(t) = \int_{\omega=0}^{+\infty} s_{\text{harm}}(\omega, t)\, d\omega \qquad \longleftarrow \textbf{Transformée de Fourier} \text{ de } s(t) \text{ (MP)}$$

Par conséquent, si on connaît la réponse d'un système **linéaire** pour une excitation harmonique quelconque, alors on connaît également la réponse de ce système pour une excitation quelconque.

I - Décomposition en série de Fourier

I.1 - Théorie et exemples

Joseph FOURIER (mathématicien et physicien français du XIX$^{\text{ème}}$ siècle) a montré que tout signal périodique peut s'écrire comme une somme de signaux harmoniques. C'est le principe de la **décomposition en série de Fourier**.

Soit $s(t)$ un signal T-périodique :

$$\boxed{s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \phi_n)} \quad \text{avec :} \quad \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$$

Ainsi,

$$s(t) = \underbrace{S_0}_{\substack{\text{composante} \\ \text{continue}}} + \underbrace{S_1 \cos(\omega t + \phi_1)}_{\substack{\text{harmonique n°1} \\ = \text{fondamental}}} + \underbrace{S_2 \cos(2\omega t + \phi_2)}_{\text{harmonique n°2}} + \underbrace{S_3 \cos(3\omega t + \phi_3)}_{\text{harmonique n°3}} + \dots$$

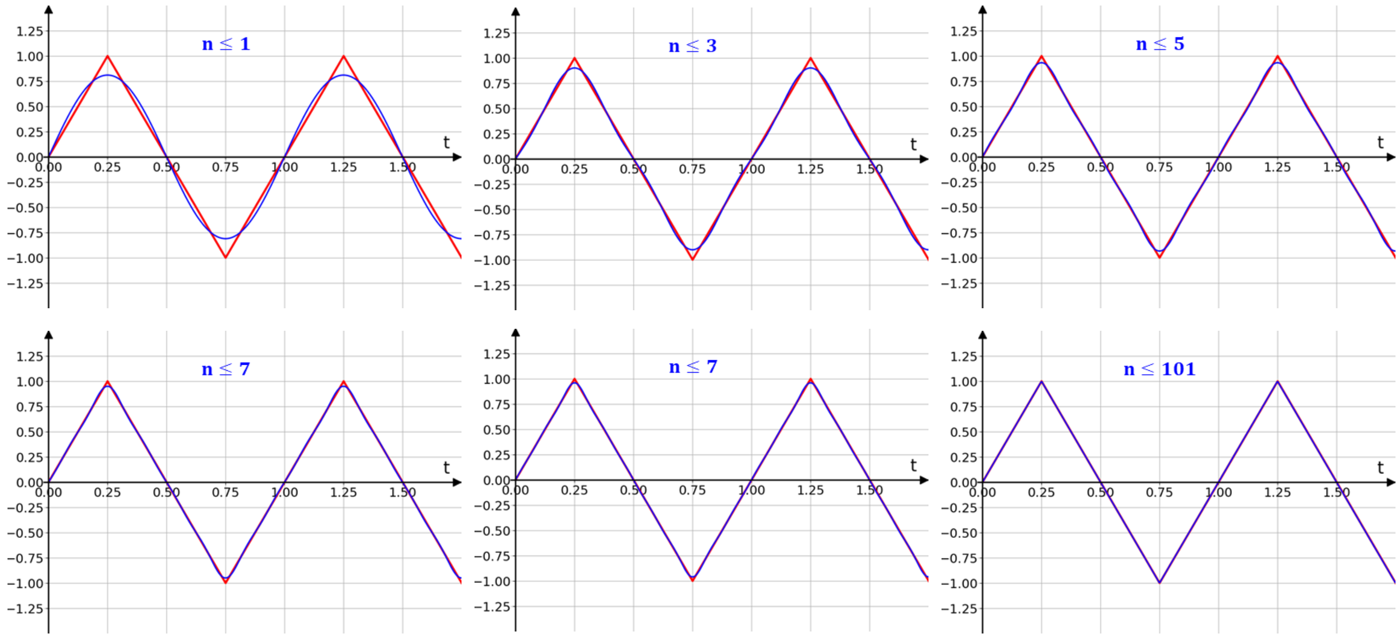
Vocabulaire :

- $\mathrm{S}_0 = \langle \mathrm{s(t)} \rangle$ est la **composante continue** où **valeur moyenne** du signal.
- $f = f_1$ est la fréquence du signal $s(t)$, appelée **fréquence fondamentale**.
- $S_n \cos(n\omega t + \phi_n)$ est l'**harmonique de rang n**, caractérisé par :
  - sa fréquence $f_n = \mathrm{n}\, f_1$, multiple entier de la fréquence fondamentale ;
  - son amplitude S_n ;
  - sa phase à l'origine ϕ_n.

Exemples :

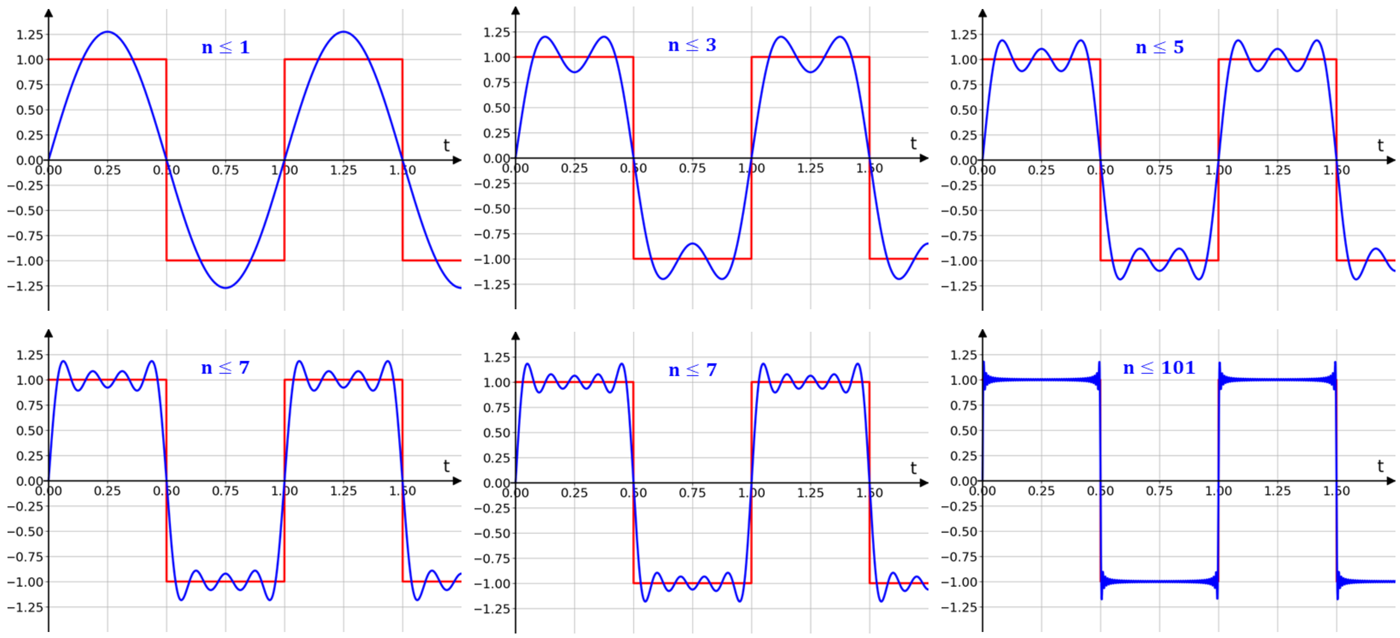
- Signal triangle :

$$\begin{aligned}
\mathrm{s_{tri}(t)} &= \frac{8}{\pi^2} \sum_{\mathrm{n}=0}^{+\infty} (-1)^{\mathrm{n}} \frac{\sin\big((2\mathrm{n}+1)\omega \mathrm{t}\big)}{(2\mathrm{n}+1)^2} \\
&= \frac{8}{\pi^2} \sin(\omega \mathrm{t}) - \frac{8}{9\pi^2} \sin(3\omega \mathrm{t}) + \frac{8}{25\pi^2} \sin(5\omega \mathrm{t}) - \cdots \\
&= \frac{8}{\pi^2} \cos\left(\omega \mathrm{t} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{9\pi^2} \cos\left(3\omega \mathrm{t} + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{8}{25\pi^2} \cos\left(5\omega \mathrm{t} - \frac{\pi}{2}\right) - \cdots
\end{aligned}$$



- Signal créneau :

$$
\begin{aligned}
s_{\text{créneau}}(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin\big((2n+1)\omega t\big)}{2n+1} \\
&= \frac{4}{\pi}\sin(\omega t) + \frac{4}{3\pi}\sin(3\omega t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5\omega t) + \cdots \\
&= \frac{4}{\pi}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3\pi}\cos\left(3\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{5\pi}\cos\left(5\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \cdots
\end{aligned}
$$



I.2 - Spectre d'un signal

Rappel :

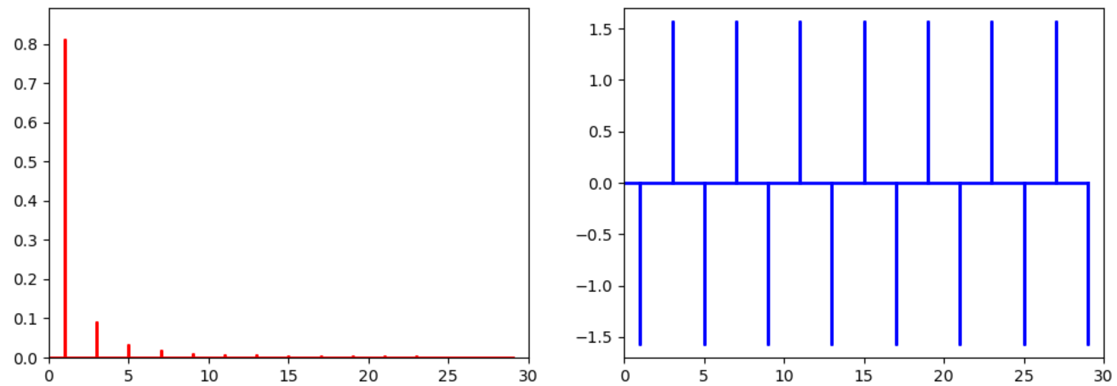
Le **spectre** d'un signal est la décomposition de ce signal en l'ensemble des fréquences qui le compose. Il s'agit donc de la décomposition en série de Fourier du signal.

Pour tracer le spectre d'un signal, il faut tracer préciser les amplitudes S_n et phases ϕ_n de chaque harmonique.

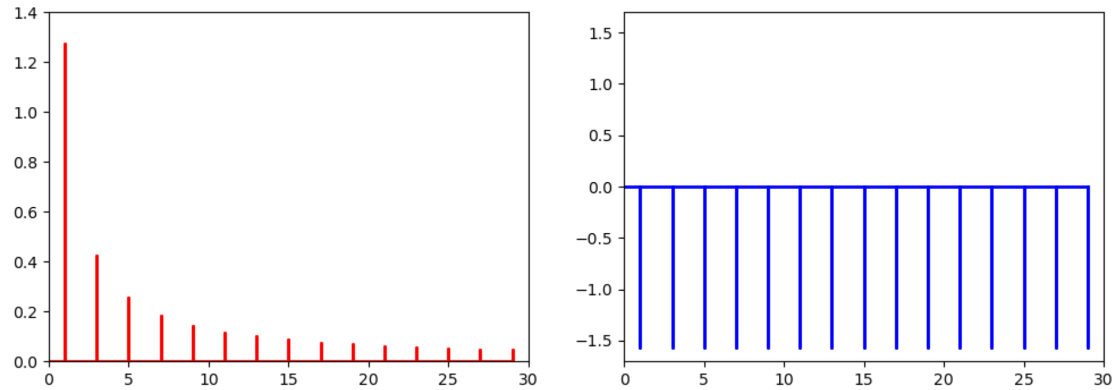
- S_n en fonction de f → Spectre en amplitude
- ϕ_n en fonction de f → Spectre en phase

Exemples :

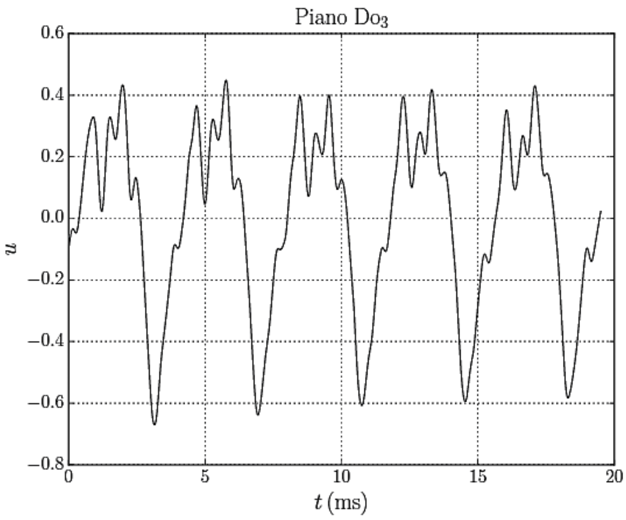
Spectre du signal triangle

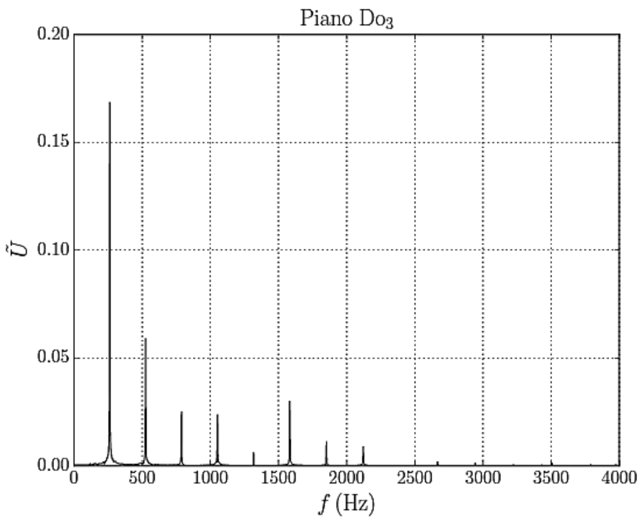


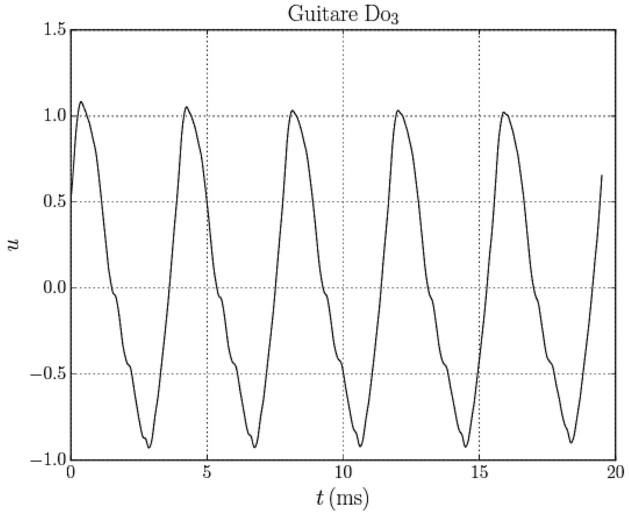
Spectre du signal créneau

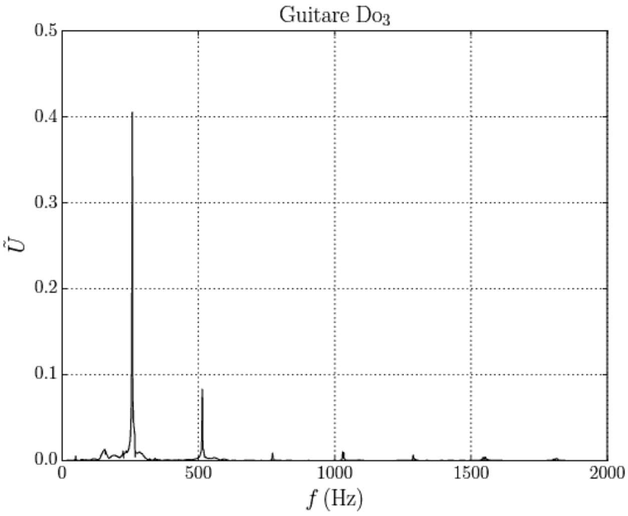


Exemples en musique :









I.3 - Interprétation mathématique

a) Base orthonormée des vecteurs

Soit un espace vectoriel à N dimensions. On note $\mathcal{B}$ une base orthonormée de cet espace.

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \\ \cdots \\ \vec{u}_N \end{pmatrix}$$

Ainsi,

- Les vecteurs de base sont normés : $\|\vec{u}_i\| = 1$
- Les vecteurs sont orthogonaux deux à deux : $\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0$

<u>Propriété</u> :

Tout vecteur $\vec{V}$ possède une décomposition unique dans la base $\mathcal{B}$:

$$\vec{V} = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n \, \vec{u}_n$$

b) Base orthonormée des fonctions périodiques

Notons $\mathcal{B}$ la base de taille infinie suivante :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_\infty \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_k = \sqrt{2}\, \cos(n\omega t) \quad \text{si} \quad k = 2n-1 \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}^* \\ u_k = \sqrt{2}\, \sin(n\omega t) \quad \text{si} \quad k = 2n \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

On associe à cette base le **produit scalaire** :

$$u_i \cdot u_j = \langle u_i u_j \rangle$$

On constate alors que :

- $u_i \cdot u_i = 1$
- $u_i \cdot u_j = 0$ si $i \neq j$

<u>Exemples</u> :

$u_0 \cdot u_1 = \langle 1 \cdot \sqrt{2}\, \cos(\omega t) \rangle = \sqrt{2}\, \langle \cos(\omega t) \rangle = 0$

$u_1 \cdot u_2 = \langle \sqrt{2}\, \cos(\omega t) \cdot \sqrt{2}\, \sin(\omega t) \rangle = \langle 2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$

$u_1 \cdot u_1 = \langle \sqrt{2}\, \cos(\omega t) \cdot \sqrt{2}\, \cos(\omega t) \rangle = 2\, \langle \cos^2(\omega t) \rangle = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

Conclusion : $\mathcal{B}$ est une base orthonormée.

On admet qu'il s'agit d'une base orthonormée des fonctions T-périodiques (avec $\mathrm{T} = 2\pi/\omega$). Ainsi, toute fonction T-périodique $s(t)$ possède une décomposition unique dans $\mathcal{B}$:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k\, u_k = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{eff,n} \cdot \sqrt{2}\, \cos(n\omega t) + b_{eff,n} \cdot \sqrt{2}\, \sin(n\omega t) \quad \text{avec :} \begin{cases} \alpha_0 = S_0 \\ \alpha_{k\ \mathrm{impair}} = a_{eff,n} \\ \alpha_{k\ \mathrm{pair}} = b_{eff,n} \end{cases}$$

On pose alors :

$$a_{eff,n} = \frac{a_n}{\sqrt{2}} \qquad b_{eff,n} = \frac{b_n}{\sqrt{2}} \qquad S_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \phi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

On retrouve ainsi la décomposition en série de Fourier de $s(t)$.

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) = \boxed{S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \phi_n)}$$

II - Valeur moyenne, valeur efficace

II.1 - Valeur moyenne

On appelle **valeur moyenne** d'un signal $s(t)$ de période T :

$$\boxed{\langle \mathrm{s(t)} \rangle = \frac{1}{\mathrm{T}} \int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}} s(t)\, \mathrm{dt}} \quad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$$

C'est la valeur mesurée par un multimètre en mode DC (*direct current*).

II.2 - Valeur efficace

a) Définition

On appelle **valeur efficace** (ou valeur **rms** pour « *root mean square* ») d'un signal $s(t)$ de période T :

$$\boxed{S_{eff} \text{ ou } S_{rms} = \sqrt{\langle \mathrm{s^2(t)} \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}} \int_{t_0}^{t_0+\mathrm{T}} s^2(t)\, \mathrm{dt}}} \quad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$$

C'est la valeur mesurée par un multimètre en mode AC (*alternative current*).

b) Cas du signal sinusoïdal

Soit un signal harmonique : $s(t) = S_m \cos(\omega t + \phi)$.

Calculons sa valeur efficace.

$$S_{eff} = \sqrt{\langle \mathrm{s^2(t)} \rangle} = \sqrt{S_m^2\, \langle \cos^2(\omega t + \phi) \rangle} = \sqrt{\frac{S_m^2}{2}}$$

On en déduit :

$$\boxed{S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}}$$

Remarque :

L'énergie contenu dans un signal : $\mathcal{E} \propto \langle \mathrm{s^2(t)} \rangle = S_{eff}^2$.

c) Cas d'un signal périodique quelconque

Soit un signal $s(t)$ périodique quelconque. On utilise sa décomposition en série de Fourier :

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n\, cos(\omega_n t + \phi_n) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

La valeur efficace S_{eff} de ce signal vaut :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle \mathrm{s}^2(\mathrm{t}) \rangle} = \sqrt{\langle s(t)\, s(t) \rangle} = \sqrt{s(t) \cdot s(t)} = \sqrt{\|s(t)\|^2} = \|s(t)\|$$

La valeur efficace d'un signal périodique est donc sa norme dans l'espace définit à la partie I.3. Or, une norme dans une base orthonormée vaut :

$$\|s(t)\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k^2} = \sqrt{S_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{eff,n}^2 + b_{eff,n}^2} = \sqrt{S_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{S_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{S_n}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

Conclusion :

$$\boxed{S_{eff}^2 = S_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{S_n}{\sqrt{2}}\right)^2 = S_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_{eff,n}^2}$$

Démonstration :

Calculons la valeur efficace du signal à l'aide du produit scalaire définit à la partie I.3.

Interprétation :

- **Mathématiquement** : S_{eff} est la norme de $s(t)$ dans l'espace vectorielle définit à la partie I.3.
- **Physiquement** : l'énergie totale $\left(\mathcal{E} \propto S_{eff}^2\right)$ d'un signal est égale à la somme des énergies contenues dans chaque harmonique $\left(\mathcal{E}_n \propto S_{eff,n}^2\right)$.