Signaux | Chapitre 2 | Cours

S2 · Interférences à deux ondes

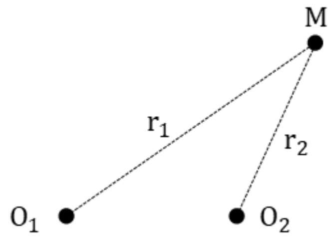
Dans le chapitre précédent, nous avons vu ce qu'était une onde et comment elle était définie d'un point de vue mathématique. Dans ce chapitre nous allons voir ce qu'il se passe lorsque plusieurs ondes se rencontrent.

La superposition d'ondes conduit notamment aux phénomènes d'interférences, d'ondes stationnaires et de diffraction, que nous allons décrire dans ce cours. Ces phénomènes sont propres à la nature ondulatoire d'un phénomène physique et ont joué un rôle majeur dans la détermination du caractère ondulatoire de la lumière, que nous discuterons plus en détail dans un prochain chapitre.

I - Interférences entre deux ondes mécaniques

I.1 - Position du problème

Soit deux sources O_1 et O_2 qui émettent respectivement deux OPH de même fréquence. Soit un point M de l'espace. Les signaux reçus au point M et à l'instant t s'écrivent :



$$s_1(M,t) = A_1 \cos\left(\omega t \underbrace{-kr_1 + \phi_1}_{\varphi_1}\right) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$s_2(M,t) = A_2 \cos\left(\omega t \underbrace{-kr_2 + \phi_2}_{\varphi_2}\right) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

avec $r_1 = O_1M$, $r_2 = O_2M$

Le signal total reçu en M s'écrit :

$$\boxed{s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)}$$

L'objectif du cours est de déterminer puis d'étudier $s(M,t)$.

I.2 - Représentation complexe

Soit un signal harmonique de la forme : $s(M,t) = A\cos\big(\omega t + \varphi(M)\big)$

On associe à ce signal réel un signal complexe : $\underline{s}(M,t) = A\, e^{i(\omega t + \varphi)} = Ae^{i\varphi}\, e^{i\omega t} = \underline{A_m}\, e^{i\omega t}$

<u>Définition</u> :

On appelle : $\boxed{\underline{A_m} = Ae^{i\varphi} = A\cos(\varphi) + i\, A\sin(\varphi)}$ l'**amplitude complexe** associé au signal $s(M,t)$.

Cette astuce mathématique permet de manipuler des nombres complexes plutôt que des cosinus, ce qui va faciliter les calculs.

I.3 - Calcul de l'amplitude résultante

On associe à chaque signal réel $s_i(\mathrm{M},t)$ un signal complexe $\underline{s_i}(\mathrm{M},t)$.

$$s_1(M,t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \leftrightarrow \quad \underline{s_1}(M,t) = \underline{A_{m,1}}\, e^{i\omega t} \quad \text{avec : } \underline{A_{m,1}} = A_1\, e^{i\varphi_1}$$
$$s_2(M,t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \quad \leftrightarrow \quad \underline{s_2}(M,t) = \underline{A_{m,2}}\, e^{i\omega t} \quad \text{avec : } \underline{A_{m,2}} = A_2\, e^{i\varphi_2}$$

On cherche à déterminer :

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t) = \mathcal{R}e\left(\underline{s_1}(M,t) + \underline{s_2}(M,t)\right) = \mathcal{R}e\left(\left(\underline{A_{m,1}} + \underline{A_{m,2}}\right) e^{i\omega t}\right) = \mathcal{R}e\left(\underline{A_m}\, e^{i\omega t}\right)$$

Posons : $\underline{A_m} = \underline{A_{m,1}} + \underline{A_{m,2}} \overset{\text{def}}{=} A\, e^{i\varphi}$

Ainsi : $s(M,t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

<u>Propriété</u> : Une somme de signaux harmoniques de pulsation ω et un signal harmonique de pulsation ω.

On associe également au signal réel $s(M,t)$ un signal complexe $\underline{s}(\mathrm{M},t)$.

$$s(M,t) = A\cos(\omega t+\varphi) \quad \leftrightarrow \quad \underline{s}(M,t) = \underline{A_m}\, e^{i\omega t} \quad \text{avec :} \quad \underline{A_m} = A\, e^{i\varphi} = \underline{A_{m,1}} + \underline{A_{m,2}}$$

Déterminons l'amplitude A du signal reçu en M.

$$\begin{aligned} A^2 &= \left|\underline{A_{m,1}} + \underline{A_{m,2}}\right|^2 \\ &= \left(\underline{A_{m,1}} + \underline{A_{m,2}}\right)\left(\underline{A_{m,1}} + \underline{A_{m,2}}\right)^* \\ &= \left(A_1\, e^{i\varphi_1} + A_2\, e^{i\varphi_2}\right)\left(A_1\, e^{-i\varphi_1} + A_2\, e^{-i\varphi_2}\right) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2\left(e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} + e^{-i((\varphi_1-\varphi_2))}\right) \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2\, A_1A_2\cos(\Delta\varphi) \quad \text{avec : } \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned}$$

Conclusion :

L'amplitude de l'onde reçue en M dépend du déphasage entre les deux signaux.

$$\boxed{A(M) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}} \qquad \textit{avec :} \qquad \Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -k(r_1 - r_2) + (\phi_1 - \phi_2)$$

Dans le cas où les signaux ont la même amplitude ($A_1 = A_2 = A_0$) :

$$A^2 = 2\, A_0^2(1+\cos(\Delta\varphi)) = 4\, A_0^2 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{A(M) = 2A_0\left|\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\right|}$$

I.4 - Conditions d'interférences

Hypothèse : pour la suite, on suppose que $\phi_1 = \phi_2 = 0$, ce qui sera toujours le cas en pratique.

Ainsi,

$$\boxed{\Delta\varphi = k(r_2 - r_1) = k\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\delta}$$

Avec $\delta = r_2 - r_1$ la **différence de marche** entre les deux ondes pour arriver au point M.

Définitions :

Des **interférences constructives** (resp. **interférences destructives**) correspond à un maximum (resp. minimum) d'amplitude du signal résultant.

Condition d'interférences constructives

$A(M)$ est maximal si :

$$\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\varphi}{2} = \pi p \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{\Delta\varphi = 2\pi p} \\ \Leftrightarrow \\ \boxed{\delta = p\lambda} \end{cases} \quad \text{avec :} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Remarque : p est appelé **l'ordre d'interférence**.

Conclusion : Pour avoir des interférences constructives, il faut que les deux signaux soient **en phase** ⇔ que leur différence de marche soit un multiple de la longueur d'onde.

Condition d'interférence destructive

$A(M)$ est minimal si :

$$\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi p \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \boxed{\Delta\varphi = 2\pi\left(p + \frac{1}{2}\right)} \\ \Leftrightarrow \\ \boxed{\delta = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda} \end{cases} \quad \text{avec :} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Conclusion : Pour avoir des interférences destructives, il faut que les deux signaux soient en **opposition de phase** ⇔ que leur différence de marche soit un multiple demi-entier de la longueur d'onde.

II - Interférences entre deux ondes lumineuses

II.1 - Calcul du déphasage

a) Chemin optique

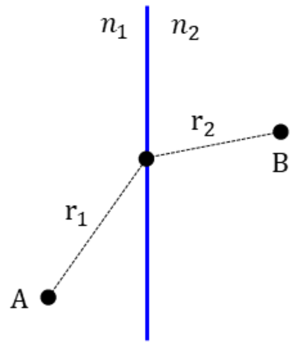
Définition :

Soit un milieu LTHI d'indice optique n. On appelle chemin optique entre deux points A et B : $\boxed{(AB) = n \cdot \mathrm{AB}}$.

Dans le cas où le rayon lumineux passe par plusieurs milieux : $(AB) = \sum_i n_i \cdot r_i$

Exemple :

$$(AB) = n_1 r_1 + n_2 r_2$$

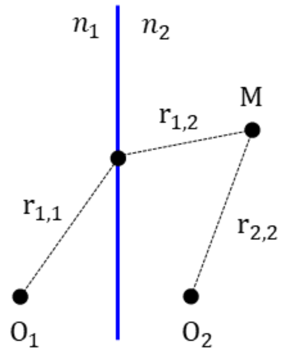


b) Différence de marche

On considère deux ondes lumineuses de même fréquence ν (donc de même ω, $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$) et de phase à l'origine nulle $\phi = 0$. Les ondes peuvent changer de milieu.

En un point M de l'espace, on a :

$$s_1(M,t) = A_1 \cos\left(\omega t - \sum_i k_i \cdot r_{1,i}\right) \quad \text{et} \quad s_2(M,t) = A_2 \cos\left(\omega t - \sum_i k_i \cdot r_{2,i}\right)$$



Rappel :

$$k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} = \frac{2\pi}{\lambda_0/n_i} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_i$$

Au point M, le déphasage entre les deux ondes vaut :

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \sum_i k_i(r_{2,i} - r_{1,i}) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sum_i (n_i \cdot r_{2,i} - n_i \cdot r_{1,i}) = \frac{2\pi}{\lambda_0}((O_2M) - (O_1M)) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta}$$

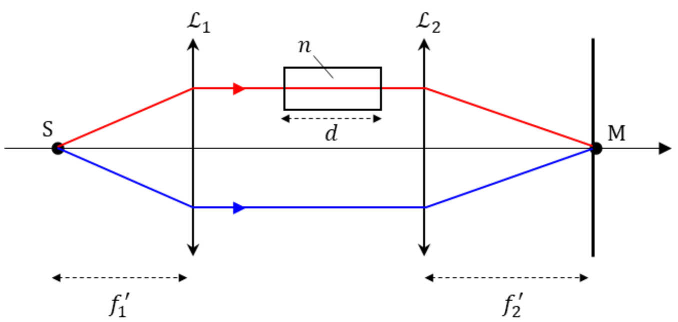
Propriété :

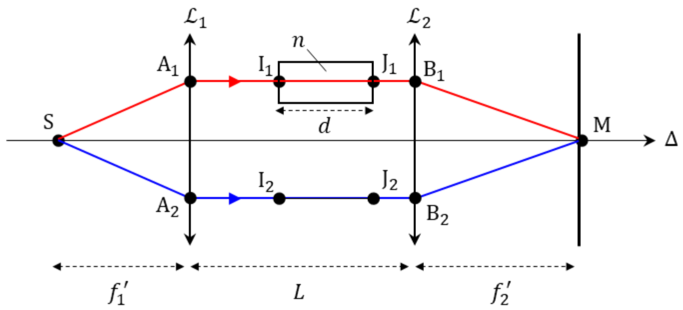
Pour une onde lumineuse, la **différence de marche** entre deux ondes est égale à la **différence de chemin optique.**

$$\delta = (O_2M) - (O_1M)$$

c) Exemple

On considère la situation suivante.





Que vaut le déphasage entre les deux rayons au point M ?

Calculons la différence de marche :

$$
\begin{aligned}
\delta &= (\mathrm{SA_1B_1M}) - (\mathrm{SA_2B_2M}) \\
&= \quad [(\mathrm{SA_1}) + (\mathrm{A_1I_1}) + (\mathrm{I_1J_1}) + (\mathrm{J_1B_1}) + (\mathrm{B_1M})] \\
&\quad -[(\mathrm{SA_2}) + (\mathrm{A_2I_2}) + (\mathrm{I_2J_2}) + (\mathrm{J_2B_2}) + (\mathrm{B_2M})] \\
&= (\mathrm{I_1J_1}) - (\mathrm{I_2J_2}) \\
&= d(n-1)
\end{aligned}
$$

On en déduit :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \frac{2\pi}{\lambda_0}\,d(n-1)}$$

II.2 - Éclairement résultant

Propriété :

Un détecteur photosensible (œil, CCD, etc.) n'est pas sensible à l'amplitude de l'onde lumineuse mais à l'**éclairement** (ou « **intensité lumineuse** ») :

$$\boxed{\mathrm{E(M)} = \mathrm{K}\,\langle \mathrm{A}^2(\mathrm{M})\rangle}$$

Avec :

- E : éclairement en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$ (puissance par unité de surface)
- K une constante de proportionnalité, qui dépend du détecteur (rarement connue)
- A : amplitude de l'onde lumineuse
- $\langle\cdot\rangle$: valeur moyenne temporelle. Ici, $\mathrm{A(M)}$ dépend de l'espace, pas du temps. Donc : $\boxed{\mathrm{E(M)} = \mathrm{K}\,\mathrm{A}^2(\mathrm{M})}$

De plus, on a vu qu'en superposant deux ondes, l'onde résultante possède une amplitude :

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + 2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cos(\Delta\varphi)$$

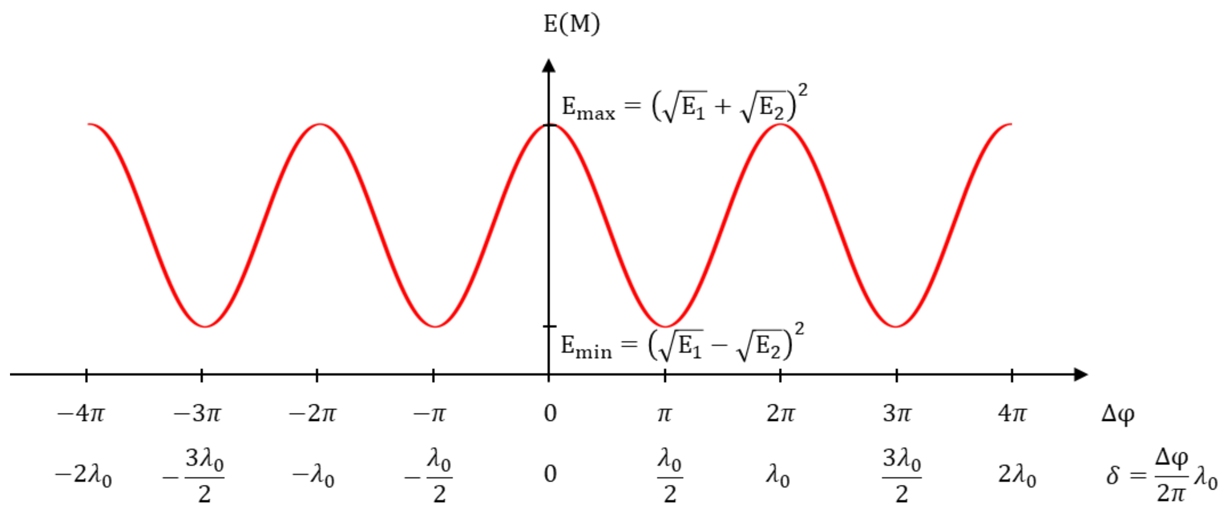
On note :

- $\mathrm{E(M)} = \mathrm{K}\,\mathrm{A}^2$: l'éclairement résultant
- $\mathrm{E_1(M)} = \mathrm{K}\,\mathrm{A}_1^2$: l'éclairement de l'onde 1 seule
- $\mathrm{E_2(M)} = \mathrm{K}\,\mathrm{A}_2^2$: l'éclairement de l'onde 2 seule

On obtient la **formule de Fresnel** :

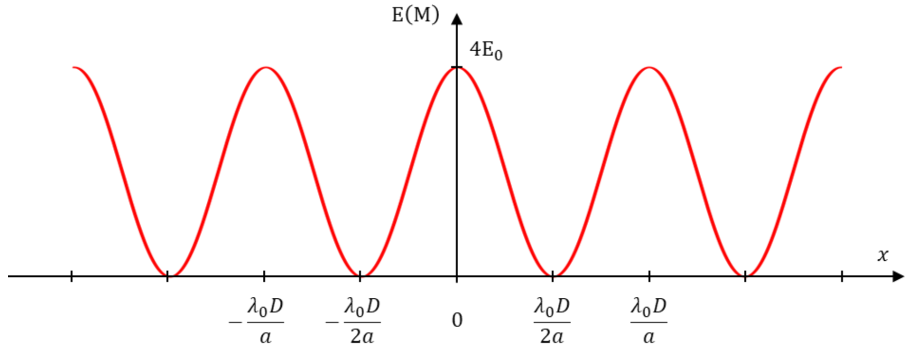
$$\boxed{\mathrm{E(M)} = \mathrm{E_1(M)} + \mathrm{E_2(M)} + 2\sqrt{\mathrm{E_1E_2}}\cos(\Delta\varphi)} \qquad \text{avec :} \qquad \boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta}$$

Tracé de l'éclairement (formule de Fresnel) :



Formule de Fresnel dans le cas où $E_1(M) = E_2(M) = E_0$:

$$\boxed{E(M) = 2E_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right)}$$



<u>Conclusion</u> :

L'objectif de tout exercice sera d'obtenir la différence de marche δ entre deux rayons. Une fois obtenue, on connait l'éclairement via la formule de Fresnel.

II.3 - Conditions d'interférences

Tous les résultats de la partie précédente restent valables.

Soit $p \in \mathbb{Z}$.

Interférences …	**Constructives**	**Destructives**
Définition	L'éclairement est maximal	L'éclairement est minimal
Déphasage	$\Delta\varphi = 2\pi\, p$	$\Delta\varphi = 2\pi\left(p + \frac{1}{2}\right)$
Différence de marche	$\delta = p\lambda_0$	$\delta = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$

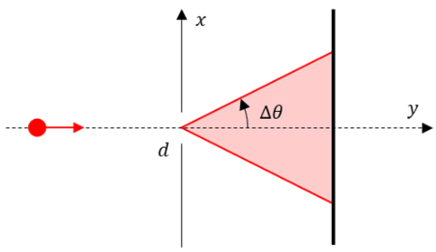
II.4 - Application : les trous d'Young

a) Description du dispositif

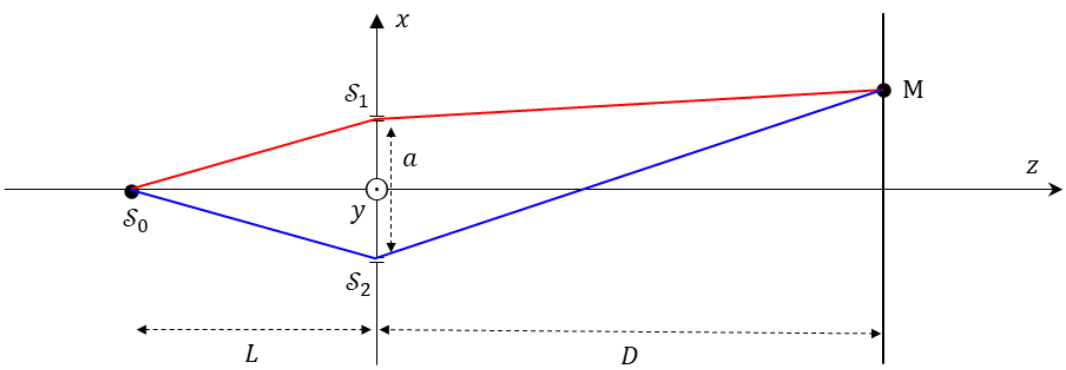
<u>Rappel</u> :

Lorsqu'une onde lumineuse arrive sur un trou de taille $d \lesssim 1000\ \lambda$, elle diffracte et forme un cône d'angle $\theta \propto \frac{\lambda}{d}$.

Dans la suite, on choisit d de sorte que $\theta \sim \frac{\pi}{2}$. Ainsi, le trou se comporte comme une source secondaire qui émet de la lumière dans toutes les directions.



Soit une source S_0 qui éclaire trous. Chaque trou se comporte comme une source secondaire, notées S_1 et S_2. On place un écran à une distance D.



Objectif : décrire la figure d'interférence sur l'écran.

Coordonnées des points :

$$\mathcal{S}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} \qquad \mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{S}_2 = \begin{pmatrix} -a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ D \end{pmatrix}$$

Hypothèse :

On suppose que : $\boxed{D \gg a, x \text{ et } y}$

b) Calcul de la différence de marche

Calcul de la différence de marche. On prendre l'indice de l'air $n = 1$.

$$\delta = (\mathcal{S}_0\mathcal{S}_2\mathrm{M}) - (\mathcal{S}_0\mathcal{S}_1\mathrm{M}) = \mathcal{S}_2\mathrm{M} - \mathcal{S}_1\mathrm{M}$$

Or,

$$\mathcal{S}_2\mathrm{M} = \sqrt{\left(x_M - x_{\mathcal{S}_2}\right)^2 + \left(y_M - y_{\mathcal{S}_2}\right)^2 + \left(z_M - z_{\mathcal{S}_2}\right)^2} = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \underbrace{\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2}_{\varepsilon}}$$

Propriété : développement limité de $(1+\varepsilon)^\alpha$.

Soit $\varepsilon \ll 1$. Alors : $\boxed{(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon}$ à l'ordre 1.

On a donc,

$$\mathcal{S}_2\mathrm{M} = D(1+\varepsilon)^{1/2} \simeq D\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \simeq D\left(1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right)$$

De même,

$$\mathcal{S}_1 M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\sqrt{1 + \left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2} \simeq D\left(1 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right)$$

On en déduit la différence de marche :

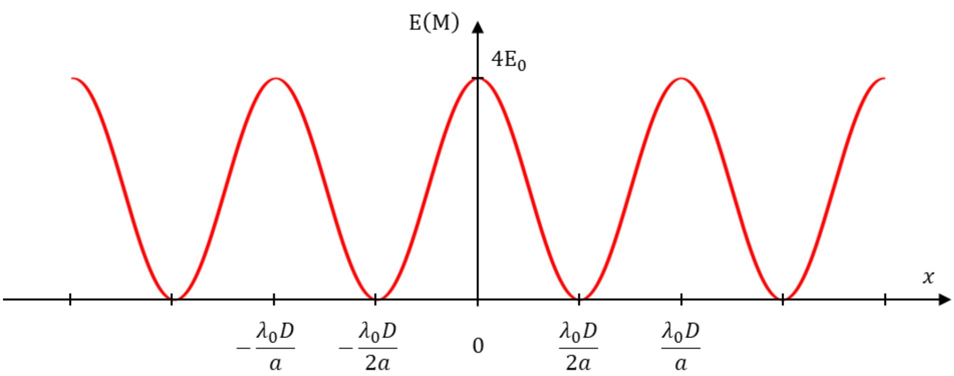
$$\delta = \mathcal{S}_2 M - \mathcal{S}_1 M = D\left(\frac{ax}{2D^2} - \frac{-ax}{2D^2}\right) \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

c) Éclairement et interprétation

Chaque source secondaire émet une onde de même amplitude. La formule de Fresnel donne alors :

$$\mathrm{E(M)} = 2\mathrm{E}_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta\right)\right) = \boxed{2\mathrm{E}_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right)\right)}$$

Graphe :



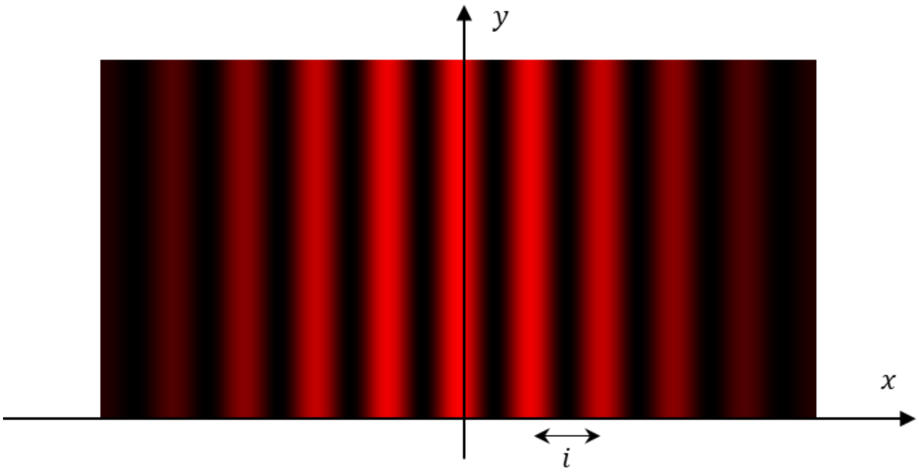
Première extinction lorsque :

$$\boxed{\Delta\varphi = \pi} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\delta = \frac{\lambda_0}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right) = -1 \\ \Rightarrow \boxed{x = \frac{\lambda_0 D}{2a}} \end{cases}$$

Interprétation :

L'éclairement ne dépend pas de y. On observe donc des franges éclairées lorsque $x \propto \frac{\lambda_0 D}{a}$ intercalées par des franges sombres.

Figure d'interférence sur l'écran :



Définition :

On appelle **interfrange**, noté i, la distance entre deux franges. Il s'agit donc de la **période spatiale** de l'éclairement.

Rappel :

Pour identifier la période T d'un cosinus, le mettre sous la forme : $f(t) = \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$.

Ici, on a :

$$\mathrm{E(M)} = 2\mathrm{E}_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{ax}{D}\right)\right) = 2\mathrm{E}_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0 D/a}\,x\right)\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = \frac{\lambda_0 D}{a}}$$

Remarque :

La figure d'interférence ne dépend pas de la position des trous le long de l'axe y. On peut donc remplacer les trous par des fentes, sans changer la nature de la figure d'interférence. Cela permettra en TP d'avoir une figure plus lumineuse.