

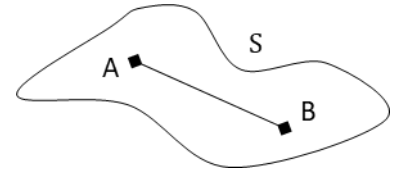
Jusqu'à présent, nous nous sommes restreint uniquement à des objets supposés ponctuels. Dans ce cours, nous allons apprendre à décrire le mouvement d'un solide, et en particulier le cas d'un solide en rotation.

I - Cinématique du solide

I.1 - Définition

En mécanique, un **solide** est un système indéformable, c'est-à-dire que la distance entre deux points quelconques de ce solide est invariante au cours du temps.

$$\|\overline{AB}\|(t) = cte \quad \forall t \text{ et } \forall A, B \in S$$



I.2 - Translation

a) Définition

Un solide S est en **translation** par rapport à un référentiel \mathcal{R} si tous les points de S sont animés d'une même vitesse $\vec{v}(t)$.

Exemples :

- **Translation rectiligne uniforme** : $\vec{v}_M(t) = v_0 \vec{u}_x \quad \forall M \in S$.

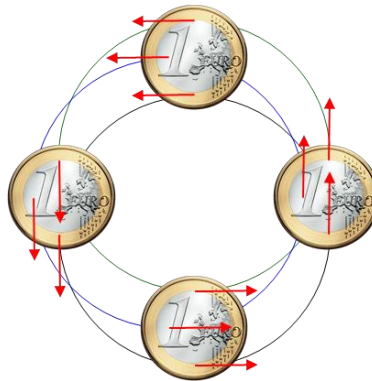


- **Translation rectiligne non-uniforme** : $\vec{v}_M(t) = v(t) \vec{u}_x \quad \forall M \in S$



Dans une translation rectiligne, la direction de \vec{v} est constante.

- **Translation circulaire** : $\vec{v}_M(t) = v_0 \cdot (\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y) \quad \forall M \in S$



L'objet décrit un cercle mais il ne tourne pas sur lui-même.

b) Quantité de mouvement

Soit deux points matériels M_1 et M_2 de quantité de mouvement $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1$ et $\vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2$. Soit le système $S = \{M_1 + M_2\}$. La quantité de mouvement de S vaut :

$$\vec{p}_{\{1+2\}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Exprimons \vec{p}_S en fonction du centre de masse G du système.

Définition :

On appelle **centre d'inertie** ou **centre de masse** (ou **barycentre** en maths) du système $\{M_1 + M_2\}$ le point G définit par :

$$\boxed{(m_1 + m_2)\vec{OG} = m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2} \quad \forall O \Rightarrow m_{\text{tot}} \frac{d\vec{OG}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{OM}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{OM}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow m_{\text{tot}} \vec{v}_G = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{p}_{\{1+2\}}$$

Propriété :

La quantité de mouvement \vec{p}_S du système est égale à la quantité de mouvement d'un point matériel fictif : G, centre de masse du système, auquel on attribue toute la masse du système.

$$\boxed{\vec{p}_{\text{system}} = m_{\text{tot}} \vec{v}_G}$$

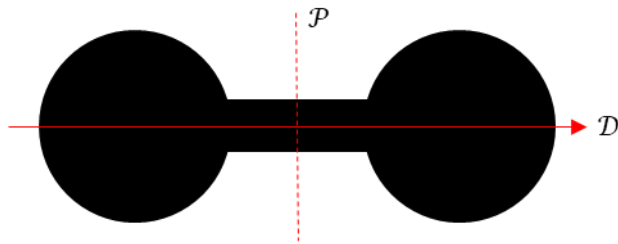
On admet la généralisation de cette propriété à tout système.

Remarque :

Pour trouver le centre de masse d'un système simple, il faut utiliser les symétries de la distribution de masse.

- Si \mathcal{P} est un plan de symétrie, alors $G \in \mathcal{P}$.
- Si \mathcal{D} est une droite de symétrie, alors $G \in \mathcal{D}$.
- Si O est un centre de symétrie, alors $G = O$.

Exemple : le centre d'une altère.



1.3 - Rotation autour d'un axe fixe

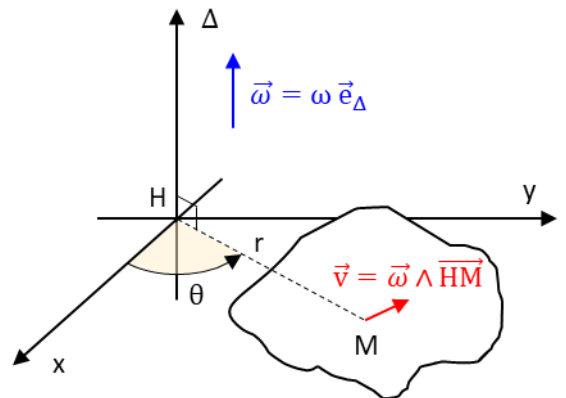
Un solide S est en **rotation** autour d'un axe fixe Δ à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega(t) \vec{u}_\Delta$ si tout point M de S a une trajectoire circulaire centrée sur H, projeté orthogonal de M sur Δ .

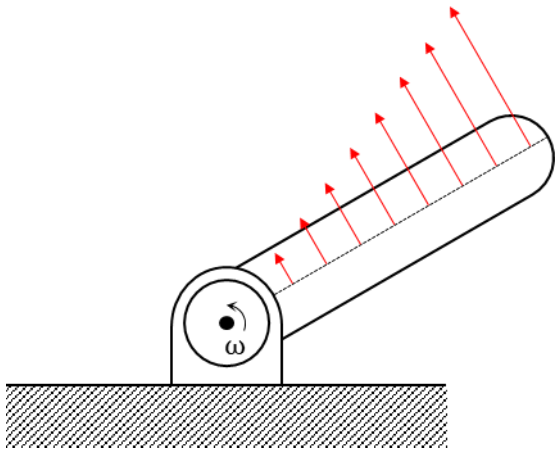
En coordonnées cylindrique :

$$\boxed{\vec{HM} = r \vec{e}_r} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{v}_M = \vec{\omega} \wedge \vec{HM} = r\omega \vec{e}_\theta}$$

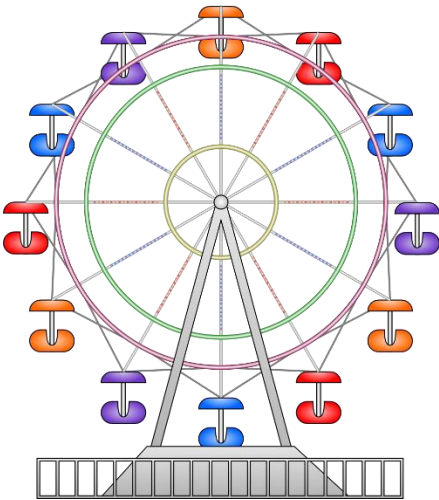
Ainsi, la vitesse de chaque point du solide est proportionnelle à la vitesse angulaire ω et à sa distance à l'axe r .

Exemple :





I.4 - Applications



(1) Dans une grande roue :

- les armatures circulaires sont en rotation autour de Δ ;
- les armatures radiales sont en rotation autour de Δ ;
- les nacelles sont en translation circulaire.

(2) On considère :

- Référentiel héliocentrique $\mathcal{R}_{h\u00e9lio}$: centr\u00e9 sur le centre du Soleil et les axes pointent vers 3 \u00e9toiles lointaines.
- Référentiel g\u00e9ocentrique \mathcal{R}_{geo} : centr\u00e9 sur le centre de la Terre et les axes pointent vers les 3 m\u00eames \u00e9toiles.

Alors :

- \mathcal{R}_{geo} est en translation elliptique par rapport \u00e0 $\mathcal{R}_{h\u00e9lio}$.

II - Rotation d'un solide

II.1 - Moment d'inertie

Rappel :

En m\u00e9canique de rotation du **point**, on a d\u00e9fini J_{Δ} par la relation : $L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega$ et on a d\u00e9montr\u00e9 que : $J_{\Delta} = m r^2$.

Pour un **solide** en rotation :

- Le moment d'inertie garde la m\u00eame d\u00e9finition : $L_{\Delta} = J_{\Delta} \omega$
- On admet que le moment d'inertie est proportionnel \u00e0 la masse du solide et \u00e0 sa distance typique \u00e0 l'axe Δ .

$$J_{\Delta} \propto m \cdot (\text{distance typique \u00e0 } \Delta)^2$$

Le facteur de proportionnalit\u00e9 sera donn\u00e9 dans les exercices.

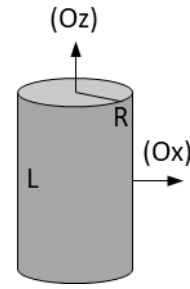
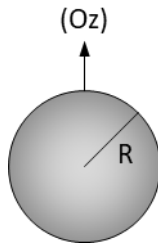
Exemples :

- Boule pleine de rayon R :

$$J_{(Oz)} = \frac{2}{5} mR^2$$

- Cylindre de rayon R et de longueur L :

$$J_{(Oz)} = \frac{1}{2} mR^2 \quad J_{(Ox)} = \frac{1}{12} mL^2$$



II.2 - Énergie cinétique

Par analogie avec la mécanique de translation, on admet que l'**énergie cinétique de rotation** (ie. l'énergie cinétique due au mouvement de rotation) de S autour d'un axe fixe Δ vaut :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J_{\Delta} \omega^2$$

II.3 - Couple

On appelle **couple** un ensemble de forces $\{\vec{F}_i\}$ dont la résultante est nulle, mais dont le moment total par rapport à un axe fixe Δ est non nul.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\Delta} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_i) \neq 0$$

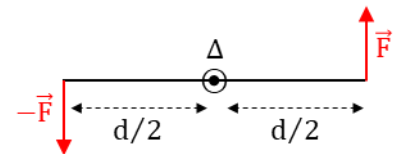
Conséquence :

Un couple de forces permet de mettre en rotation un solide (car $\Gamma_{\Delta} \neq 0$), sans déplacement du centre de masse (car $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$).

Exemple :

On a : $\vec{F} + (-\vec{F}) = \vec{0}$

Et : $\Gamma_{\Delta} = \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) + \mathcal{M}_{\Delta}(-\vec{F}) = \frac{d}{2} F + \frac{d}{2} F = d F \neq 0$



II.4 - Liaison pivot

Définition :

Une **liaison pivot** d'axe Δ est une liaison qui restreint les possibilités de mouvement du solide à la seule rotation autour de l'axe Δ .

Propriétés :

Une liaison pivot compense toutes les actions mécaniques (forces et moments) à l'exception des moments dirigés selon l'axe Δ .

Elle est dite **parfaite** si elle n'exerce pas de couple de frottement.

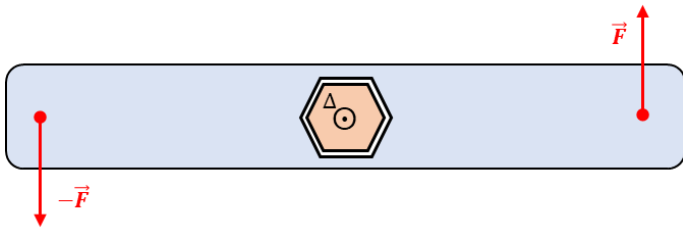
Applications :

Système = { tige } de centre de masse O.

La liaison pivot permet uniquement une rotation autour de Δ .

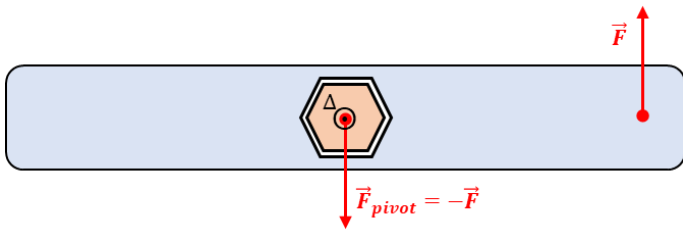
Ainsi, sur la tige, on a nécessairement :

- $\sum \vec{F} = \vec{0}$
- $\vec{\Gamma}_O = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \propto \vec{u}_{\Delta}$



$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_O &= d \vec{u}_x \wedge F \vec{u}_y + (-d \vec{u}_x) \wedge (-F \vec{u}_y) \\ &= 2dF \vec{u}_\Delta \end{aligned}$$

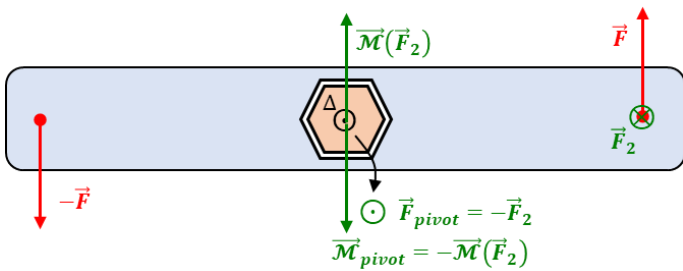


$$\sum \vec{F} = F \vec{u}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_O &= d \vec{u}_x \wedge F \vec{u}_y \\ &= dF \vec{u}_\Delta \end{aligned}$$

La liaison pivot doit exercer une force :

$$\vec{F}_{pivot/tige} = -F \vec{u}_y$$



$$\sum \vec{F} = -F_2 \vec{u}_\Delta$$

$$\vec{\Gamma}_O = 2dF \vec{u}_\Delta + dF_2 \vec{u}_y$$

La liaison pivot doit exercer une force et un moment :

$$\vec{F}_{pivot/tige} = F_2 \vec{u}_\Delta$$

$$\vec{\Gamma}_{pivot/tige} = -dF_2 \vec{u}_y$$

II.5 - Théorème du moment cinétique

Soit \mathcal{R} un référentiel galiléen. Soit un axe fixe Δ dirigé par \vec{u}_Δ . TMC appliqué à un solide :

$$\frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) \Rightarrow J_\Delta \dot{\omega} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext})$$

II.6 - Théorème de la puissance cinétique

Soit un référentiel galiléen \mathcal{R} . TPC appliqué à un solide :

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) \omega$$

Démonstration :

On part du TMC, on multiplie par ω :

$$J_\Delta \dot{\omega} \omega = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) \omega \Rightarrow J_\Delta \omega \dot{\omega} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_\Delta \omega^2 \right) = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) \omega$$

À retenir :

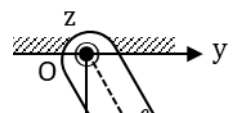
Puissance d'un moment : $\mathcal{P} = \mathcal{M}_\Delta \cdot \omega$

On peut raisonner par analogie : puissance d'une force = force \times vitesse.

III - Application : le pendule pesant

III.1 - Sans frottement

a) TMC



Un pendule pesant est un pendule où l'on ne peut pas négliger la masse de la tige.

Soit un solide relié en O à une liaison pivot parfaite d'axe (Oz). On note J_z le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe (Oz).

Bilan des moments :

- Le poids \vec{P} : $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z = -\ell mg \sin(\theta)$
- Liaison pivot ??

La liaison pivot exerce une force \vec{F}_{pivot} (sinon le pendule tomberait) qui s'exerce en O. Donc son moment par rapport à (Oz) est nul.

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_{pivot}) = (\vec{OO} \wedge \vec{F}_{pivot}) \cdot \vec{u}_z = \vec{0}$$

On applique le TMC dans le référentiel terrestre galiléen.

$$\frac{dL_z}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{F}_{pivot}) + \mathcal{M}_z(\vec{P}) \Rightarrow J_z \ddot{\theta} = -\ell mg \sin(\theta) \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\ell mg}{J_z} \sin(\theta) = 0}$$

On retrouve une équation analogue au pendule simple, seule la pulsation propre est modifiée :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{\ell mg}{J_z}}$$

Remarque :

Dans le cas d'un pendule simple, $J_z = m\ell^2$ et on retrouve bien la pulsation propre du pendule simple : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

b) TPC

On applique le TPC dans le référentiel terrestre galiléen.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_z \omega^2 \right) = \mathcal{M}_z(\vec{P}) \cdot \omega \Rightarrow J_z \omega \dot{\omega} = -\ell mg \omega \sin(\theta) \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} + \frac{\ell mg}{J_z} \sin(\theta) = 0}$$

On trouve bien le même résultat.

III.2 - Avec frottement

On considère que la liaison pivot non parfaite, ie. qu'elle exerce un couple résistif. On suppose que ce couple est de la forme : $\boxed{\vec{\Gamma} = -\alpha \omega \vec{u}_z}$.

On applique le TMC dans le référentiel terrestre galiléen.

$$\frac{dL_z}{dt} = \Gamma_z + \mathcal{M}_z(\vec{F}_{pivot}) + \mathcal{M}_z(\vec{P}) \Rightarrow J_z \ddot{\theta} = -\alpha \dot{\theta} - \ell mg \sin(\theta) \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{J_z} \dot{\theta} + \frac{\ell mg}{J_z} \sin(\theta) = 0}$$

On obtient un oscillateur amorti.