

Dans ce chapitre, nous allons étudier un type de force particulier : les forces centrales conservatives. Il s'agit donc de force dérivant d'une énergie potentielle, et qui sont toujours dirigées vers un même centre de force.

## I - Mouvement dans un champ de force centrale

### I.1 - Définition

Une force  $\vec{F}$  est dite **centrale** si elle est orientée selon le vecteur unitaire  $\vec{e}_r$  des coordonnées sphériques.

$$\vec{F} = F(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

Exemples :

- Force de gravitation d'une masse ponctuelle  $M$  sur une masse  $m$  :

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

- Force électrostatique d'une charge ponctuelle  $Q$  sur une charge  $q$  :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{e}_r$$

- Force de rappel élastique d'un ressort (attaché à l'une des extrémités) :

$$\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{e}_r$$

### I.2 - Conservation du moment cinétique

Soit un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  et soit  $O$  un point fixe de ce référentiel. Le TMC donne :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = r \vec{e}_r \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}_O = \overrightarrow{cte}}$$

Le moment cinétique par rapport au point est constant en norme et en direction.

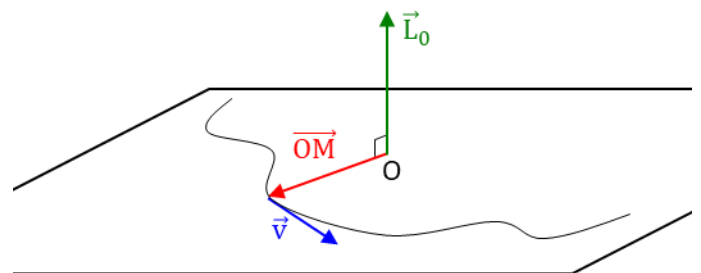
### I.3 - Conséquences

#### a) Mouvement plan

On a :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{cte} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Donc :  $\overrightarrow{OM}$  et  $\vec{v}$  sont toujours orthogonaux à un vecteur constant. Cela implique que le mouvement est dans le plan orthogonal à  $\vec{L}_O$  et passant par  $O$ .



Puisque le mouvement est plan, on ne se place plus en coordonnées sphériques mais en coordonnées cylindriques/polaires (avec :  $\vec{L}_O \propto \vec{e}_z$ ).

#### b) Loi des aires

Rappel :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta$$

Le moment cinétique vaut :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{cte} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r \vec{e}_r \wedge m(\dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta) = \boxed{mr^2\omega \vec{e}_z}$$

### Propriété :

Lors d'un mouvement dans un champ de force centrale (à masse constante), la quantité  $C = r^2\omega$  est une constante, appelée la **constante des aires**.

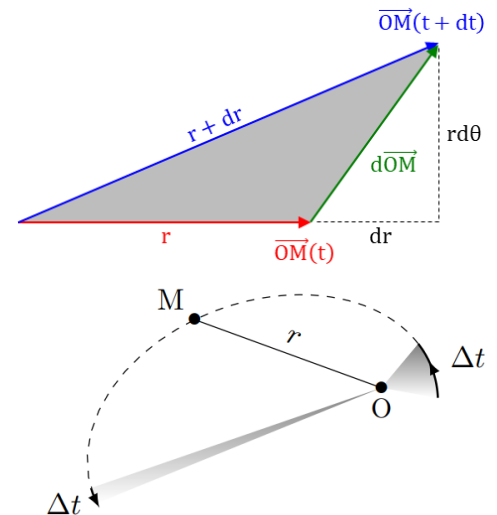
### Interprétation géométrique :

Calculons l'aire élémentaire balayée par le vecteur  $\overline{OM}$  pendant  $dt$ .

$$\delta\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{2} r \times r d\theta$$

Ainsi :

$$\frac{\delta\mathcal{A}}{dt} = \frac{r^2 d\theta}{2 dt} = \frac{C}{2} \Rightarrow \int \delta\mathcal{A} = \frac{C}{2} \int dt \Rightarrow \mathcal{A}(\Delta t) = \frac{C}{2} \Delta t$$



### Deuxième loi de Kepler ou loi des aires :

Le vecteur position balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

## II - Champ de force centrale conservative

### II.1 - Définition

Rappel : Une force est dite conservative si elle dérive d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$ .

$$\vec{F} = -\overline{\text{grad}}(\mathcal{E}_p)$$

Gradient de coordonnées sphériques :

$$\overline{\text{grad}}(\mathcal{E}_p) = \underbrace{\frac{\partial \mathcal{E}_p(r, \theta, \varphi)}{\partial r}}_{-F(r, \theta, \varphi)} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{E}_p(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta}}_0 \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{E}_p(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi}}_0 \vec{e}_\varphi$$

Donc  $\mathcal{E}_p$  ne dépend ni de  $\theta$ , ni de  $\varphi$ .

Ainsi, pour une force centrale conservative :

$$\vec{F}(r) = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr} \vec{e}_r$$

### II.2 - Énergie potentielle effective

On se place en coordonnées polaire. Rappel :  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta \Rightarrow v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\omega)^2}$

Calculons l'énergie mécanique d'un point matériel.

$$\mathcal{E}_m(r, \theta) = \mathcal{E}_c(r, \theta) + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + (r\omega)^2) + \mathcal{E}_p(r)$$

On utilise la constante des aires :  $C = r^2\omega$ . Ainsi,

$$\mathcal{E}_m(r) = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + \mathcal{E}_p(r) = \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{r}^2}_{\mathcal{E}_c \text{ radiale}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)}_{\mathcal{E}_{p,eff}(r)}$$

### Propriété :

Le mouvement 2D dans un champ de force centrale conservative est équivalent à un mouvement 1D, où l'**énergie potentielle effective** vaut :

$$\mathcal{E}_{p,eff} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)$$

### Interprétation physique (HP, cf. MP) :

En faisant cela, on se place dans le référentiel tournant à la vitesse  $\omega$ . Dans ce référentiel, le mouvement est à 1D et  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r$ . Mais ce référentiel n'est pas galiléen, il vaut donc ajouter l'énergie potentielle de la force centrifuge.

$$\mathcal{E}_{p,eff} = \mathcal{E}_p(\text{Force centrifuge}) + \mathcal{E}_p \Rightarrow \vec{F}_{centrifuge} = m \frac{C^2}{r^3} \vec{u}_r = mr\omega^2 \vec{u}_r$$

Avec cette vision, on ne s'intéresse donc qu'à **la partie radiale du mouvement**.

## III - Cas particulier d'une force newtonienne

### III.1 - Définition

Une force est dite **newtonienne** si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{F}(r) = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$$

Avec K une constante. Si  $K > 0$ , la force est attractive ;  $K < 0$ , la force est répulsive.

Exemple de force newtonienne :

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec : } \boxed{K = G mM} \qquad \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec : } \boxed{K = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}}$$

### III.2 - Énergie potentielle effective

L'énergie potentielle d'une force newtonienne vaut :

$$\vec{F}(r) = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr} \vec{e}_r \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_p(r) = -\frac{K}{r} + cte}$$

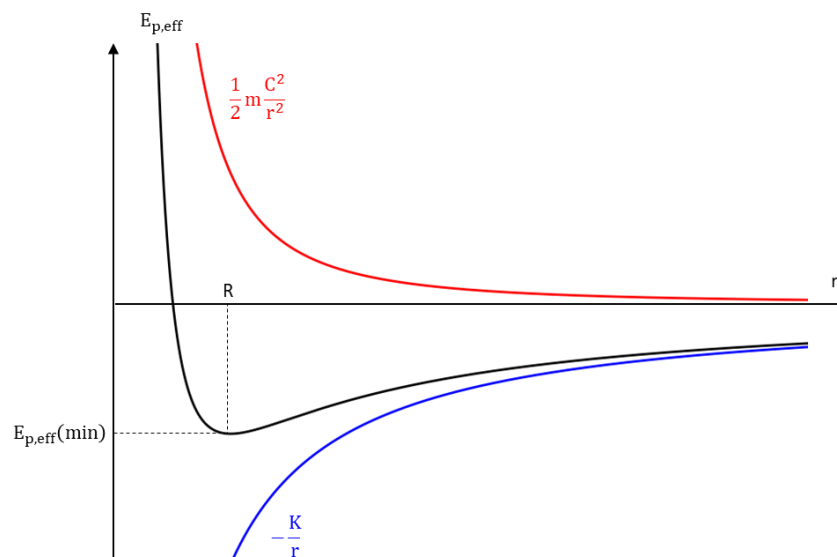
On en déduit l'énergie potentielle effective :

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,eff} = \frac{1}{2}m \frac{C^2}{r^2} - \frac{K}{r}}$$

### III.3 - Nature du mouvement : cas d'une force attractive

On suppose  $K > 0$ .

Graphes de l'énergie potentielle effective :



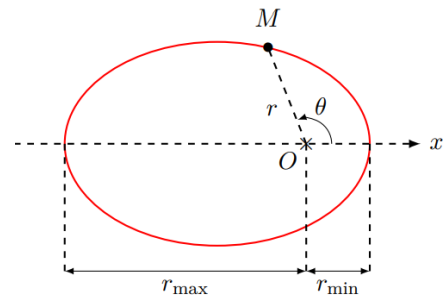
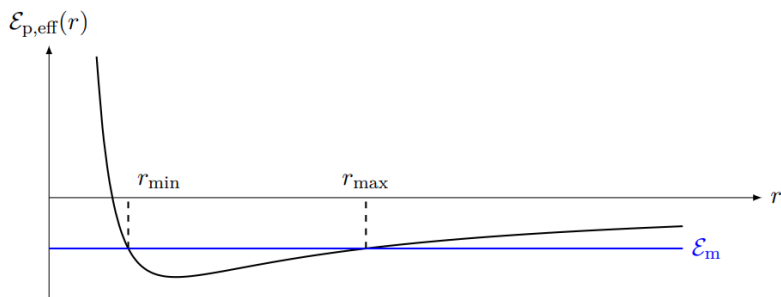
Conclusion :

- Le mouvement est borné si  $\mathcal{E}_m < 0$
- Le mouvement est non borné si  $\mathcal{E}_m \geq 0$

Propriété :

On admet que :

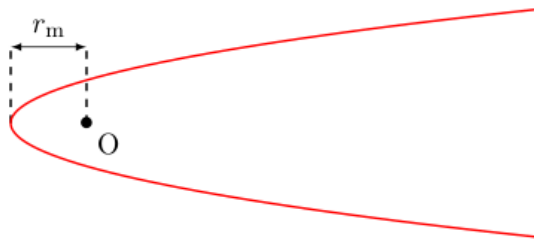
- Si  $\mathcal{E}_m < 0$ , alors la trajectoire est une **ellipse** où O est l'un des foyers.
- En particulier, si  $\mathcal{E}_m = \min(\mathcal{E}_{p,eff})$ , la trajectoire est un **cercle**.



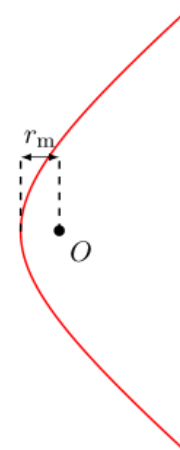
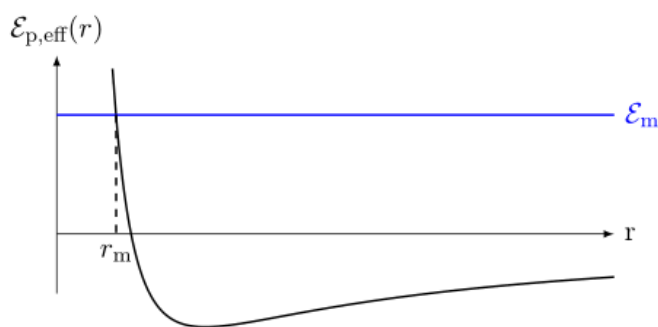
**Première loi de Kepler ou loi des orbites :**

Dans le cas système solaire, le Soleil est considéré fixe en O, et les planètes décrivent autour du Soleil une trajectoire elliptique donc le Soleil est l'un des foyers.

- Si  $\mathcal{E}_m = 0$ , alors la trajectoire est une **parabole** où O est le foyer.



- Si  $\mathcal{E}_m > 0$ , alors la trajectoire est une **hyperbole** (branche attractive) où O est l'un des foyers.

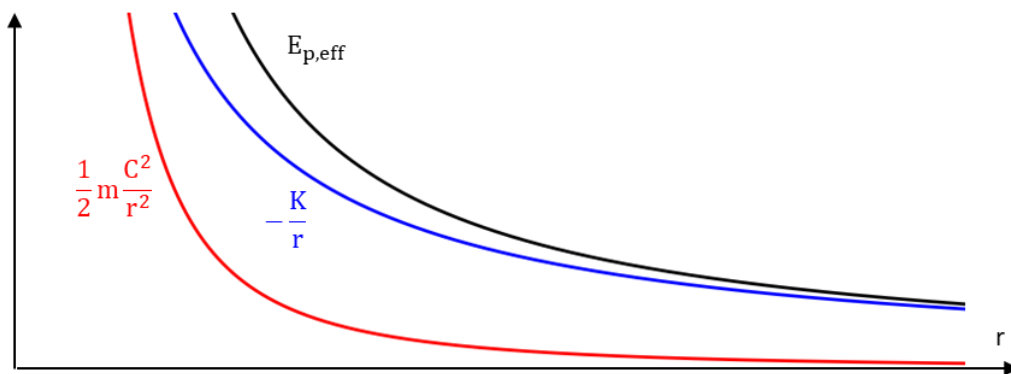


À retenir : Le signe de  $\mathcal{E}_m$  détermine la nature de la trajectoire.

- $\mathcal{E}_m < 0$  ellipse ou cercle
- $\mathcal{E}_m = 0$  parabole
- $\mathcal{E}_m > 0$  hyperbole

### III.4 - Nature du mouvement : cas d'une force attractive

Graphe de l'énergie potentielle effective :

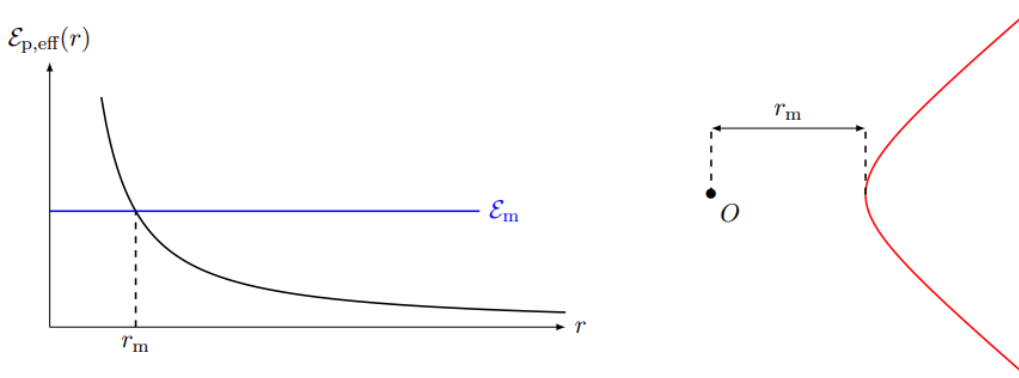


Conclusion :

Le mouvement est toujours non borné.

Propriété :

On admet que la trajectoire est une **hyperbole** (branche répulsive) où O est l'un des foyers.



### III.5 - Grandeurs conservées au cours du mouvement

Dans les exercices sur les forces centrales, toujours penser à la conservation de l'**énergie mécanique**  $\mathcal{E}_m$  et du **moment cinétique**  $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ .

Application :

Connaissant  $v_\infty$  et  $b$ , déterminer  $r_p$  et  $v_p$ .

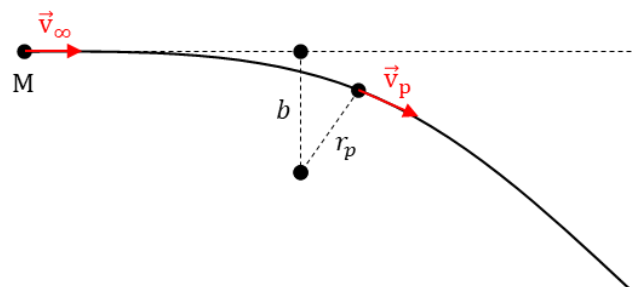
Remarque : par définition du périhélie (P),  $r_p = \min(r) \Rightarrow \dot{r}_p = 0$ .

On en déduit :  $\vec{v}_p = \dot{r}_p \vec{e}_r + r_p \omega_p \vec{e}_\theta = r_p \omega_p \vec{e}_\theta \perp \vec{OP}$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{K}{r}$$

et

$$b v_\infty = -r^2 \dot{\theta} = r_p v_p$$



### III.6 - Cas du mouvement circulaire

a) Vitesse

On considère un satellite de masse  $m$  en orbite circulaire autour d'un objet fixe de masse  $M$ .

On rappelle la constante des aires :  $C = R^2 \omega = cte \Rightarrow \omega = cte$

Ainsi,

$$\overline{OM} = R \vec{e}_r \quad \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta = v \vec{e}_\theta$$

Le mouvement est donc **uniforme**.

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

Le PFD donne :

$$-m \frac{v^2}{R} \vec{e}_r = -G \frac{mM}{R^2} \vec{e}_r \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

Remarque : la vitesse sur une orbite circulaire ne dépend pas de la masse de l'objet qui orbite.

### b) Période

Le mouvement étant uniforme :

$$v = R\omega = \frac{2\pi R}{T} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \Rightarrow \boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3}$$

**Troisième loi de Kepler** ou **loi des périodes** (cas circulaire) :

Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube de la distance au Soleil.

On admet la généralisation du résultat pour les orbites elliptiques ( $r \rightarrow a$  le demi grand axe).

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3}$$

**Troisième loi de Kepler** (cas général) :

Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi-grand axe de l'orbite elliptique.

### c) Énergie mécanique

On a :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}m \frac{GM}{R} - \frac{GmM}{R} = \boxed{-\frac{GmM}{2R}} = \underbrace{-\mathcal{E}_c}_{\text{Remarque HP}} = \frac{\mathcal{E}_p}{2}$$

On admet la généralisation du résultat pour les orbites elliptiques ( $r \rightarrow a$ ).

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{GmM}{2a}}$$

Remarque :

Pour les orbites circulaires et elliptiques, on a bien  $\mathcal{E}_m < 0$ . De plus, si le demi-grand axe de l'ellipse  $a \rightarrow +\infty$ , alors  $\mathcal{E}_m \rightarrow 0$ .

## III.7 - Application aux satellites terrestres

### a) Vitesses de satellisation

Déterminons l'intervalle de vitesse que doit avoir un satellite en orbite autour de la Terre.

La **vitesse de satellisation minimale** est la vitesse d'une orbite circulaire de rayon  $R_T$ .

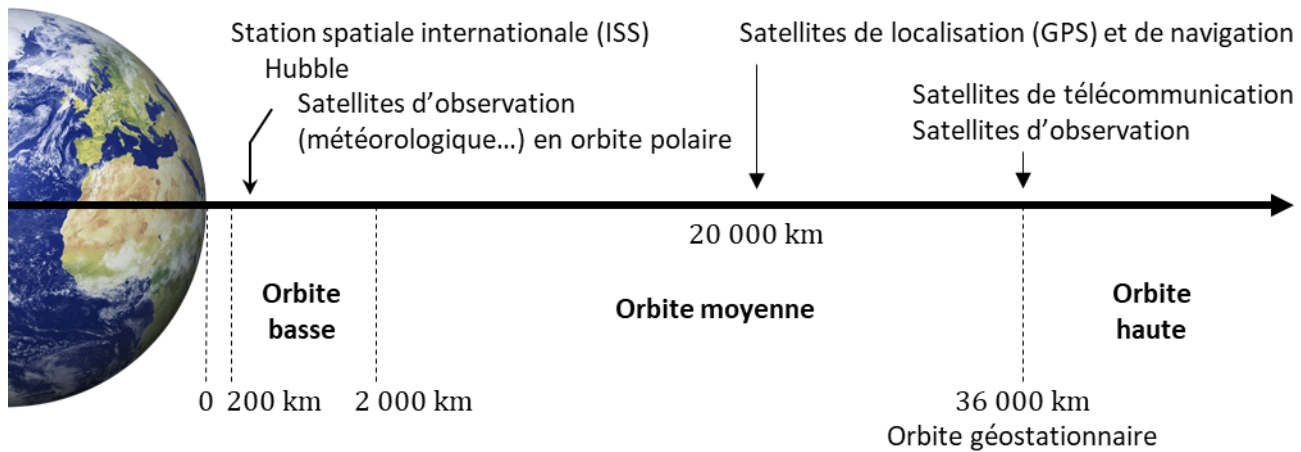
$$v_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}} \simeq 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse de satellisation maximale ou **vitesse de libération** est la vitesse de l'orbite parabolique à son périégée.

$$\mathcal{E}_m = 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM_T}{R_T} \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = v_1\sqrt{2} \simeq 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

## b) Orbites utiles

On distingue plusieurs orbites utiles.



### ○ **Orbite basse**

L'existence d'une fine atmosphère résiduelle provoque la rentrée atmosphérique des débris en quelques mois/années. L'orbite n'est donc pas trop polluée.

Ici, les satellites ont une vitesse angulaire plus grande que la Terre : ils font environ 12 fois le tour de la Terre par jour. Les satellites d'observations sont placés sur une orbite polaire (passant par les deux pôles), permettant d'observer toute la Terre.

### ○ **Orbite moyenne**

Peu utilisée. Exception : satellites de localisation et de navigation.

### ○ **Orbite géostationnaire**

Ici, les satellites ont exactement la même vitesse angulaire que la Terre. Très utile pour les satellites de télécommunications et d'observation.

Déterminons leur altitude (troisième loi de Kepler) :

$$T_{Terre}^2 = \frac{4\pi^2}{GM_T} (R_T + h_{geo})^3 \Rightarrow \boxed{h_{geo} = 36\,000 \text{ km}}$$

Cela permet de viser toujours le même point du globe, à condition être dans la plan équatorial.

