

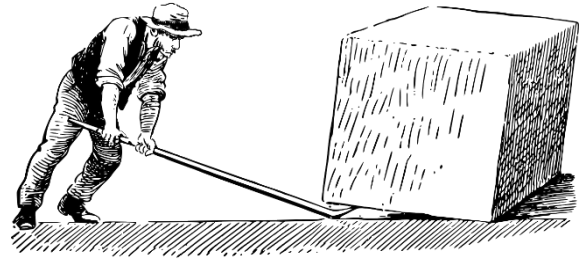


M6 • Mécanique de rotation du point

On connaît tous intuitivement l'effet de levier : si on considère l'exemple ci-contre, il est plus facile de soulever le rocher si on éloigne ses mains du point de contact entre le levier et le sol.

On retrouve le même phénomène si on essaie d'ouvrir une porte : en poussant près des gonds, c'est beaucoup plus difficile que si on pousse à l'autre extrémité au niveau de la poignée, c'est d'ailleurs la raison pour laquelle les poignées de porte sont placées à cet endroit !

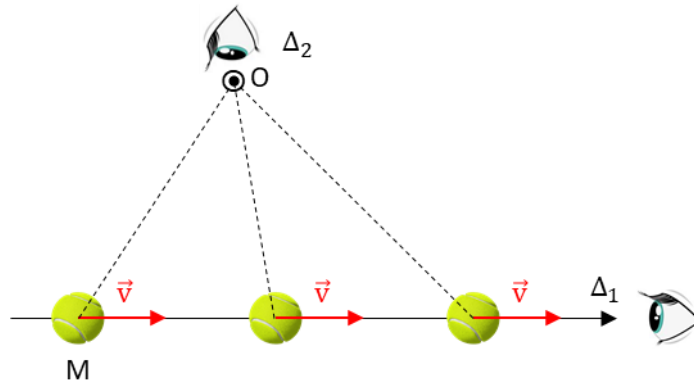
"Donnez-moi un point d'appui et un levier, je soulèverai le monde", Archimède (~ 200 av. J.C.)



Cet effet de levier est intimement lié à la force utilisée mais également à son point d'application. Pour l'étudier, il nous faut parler de mécanique de rotation, qui est la branche de la mécanique qui s'intéresse aux rotations des objets (point matériel ou solide).

I - Introduction

I.1 - Approche qualitative

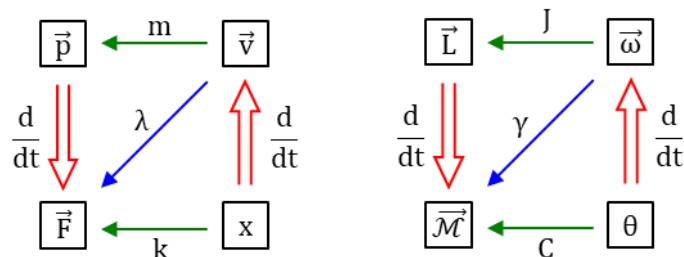


Un observateur placé sur l'axe Δ_2 doit se tourner pour suivre le mouvement de la balle → la balle est en rotation par rapport à l'axe Δ_2 .

Un observateur placé sur l'axe Δ_1 ne doit pas se tourner pour suivre le mouvement de la balle → la balle n'est pas en rotation par rapport à l'axe Δ_2 .

Un système n'est donc pas en rotation de manière absolue. Il faut toujours préciser par rapport à quel axe, ou par rapport à quel point on étudie la rotation.

I.2 - Approche par analogie



En mécanique de rotation, la quantité de base est un angle. Il faut maintenant définir l'équivalent de :

- Vitesse → Vitesse angulaire
- Masse → Moment d'inertie
- Quantité de mouvement → Moment cinétique (= quantité de rotation)
- Force → Moment de force

II - Les grandeurs de la mécanique de rotation

II.1 - Vitesse angulaire

Soit un axe fixe Δ dirigé par \vec{u}_Δ .

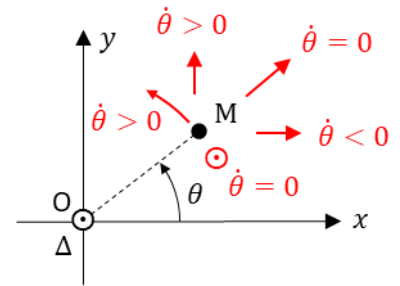
On définit la **vitesse angulaire** de M par rapport à l'axe Δ :

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u}_\Delta$$

On utilise la règle de la main droite pour connaître le sens de rotation.

Exemples :

- Si M monte verticalement : θ augmente, donc $\dot{\theta} > 0$;
- Si M se déplace horizontalement vers la droite : θ diminue, donc $\dot{\theta} < 0$;
- Si M s'éloigne radialement : $\theta = cte$, donc $\dot{\theta} = 0$;
- Si M se déplace perpendiculairement à la feuille : $\theta = cte$ (cf. coordonnées cylindriques), donc $\dot{\theta} = 0$.



II.2 - Moment cinétique

a) Cas du point matériel

Soit un axe fixe Δ dirigé par \vec{u}_Δ et un point fixe $O \in \Delta$.

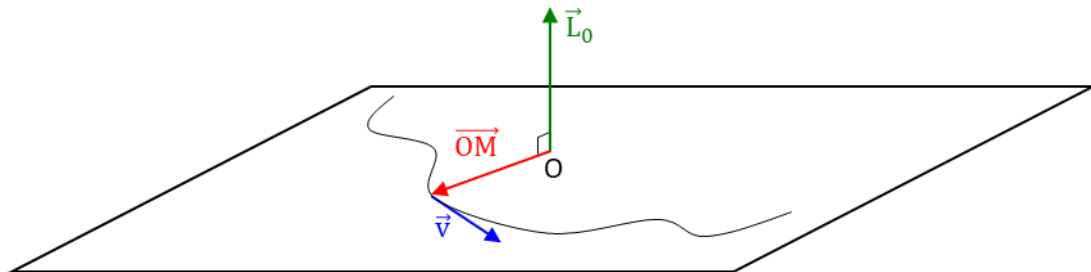
Définition :

On appelle **moment cinétique** (« quantité de rotation ») de M par rapport au point O :

$$\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Propriété :

\vec{L}_O est un vecteur perpendiculaire à \overrightarrow{OM} et \vec{v} , dirigé selon la règle de la main droite.



Remarque :

\vec{L}_O est l'équivalent de la quantité de mouvement en mécanique de rotation.

Définition :

On appelle **moment cinétique** de M par rapport à l'axe Δ :

$$L_\Delta(M) = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Propriétés :

- $L_\Delta > 0$ si, lorsque la main droite suit le mouvement, le pouce pointe dans la direction de \vec{u}_Δ .
- L_Δ ne dépend pas du point O choisi.

Démonstration :

Soit O et O' appartenant à Δ .

$$\vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta = ((\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}) \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta = \underbrace{(\overrightarrow{OO'} \wedge m\vec{v} \cdot \vec{u}_\Delta)}_{\substack{\parallel \vec{u}_\Delta \\ \perp \vec{u}_\Delta}} + \vec{L}_{O'} \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{L}_{O'} \cdot \vec{u}_\Delta$$

b) Cas d'un ensemble de points

Soit le système $S = \{M_i\}$ composé d'un ensemble de points matériels. Le moment cinétique de S par rapport au point O à par rapport à l'axe Δ vaut :

$$\vec{L}_O(S) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{p}_i = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v}_i \quad \text{et} \quad L_\Delta(S) = \vec{L}_O \cdot \vec{u}_\Delta$$

II.3 - Moment d'inertie

On se place en coordonnées cylindrique et on note H le projeté orthogonal de M sur l'axe Δ .

On a :

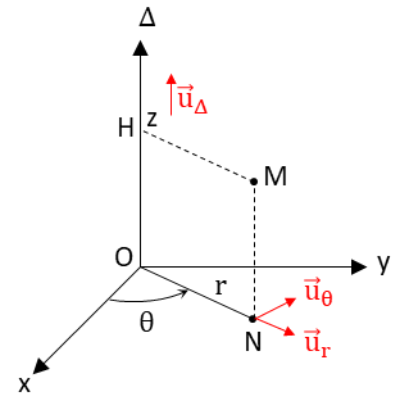
$$\begin{aligned} L_\Delta(M) &= \vec{L}_H \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{HM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u}_\Delta \\ &= (r \vec{u}_r \wedge m(\dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta)) \cdot \vec{u}_\Delta \\ &= mr^2 \dot{\theta} \\ &= mr^2 \omega \end{aligned}$$

Par analogie avec la mécanique de translation, on définit J_Δ le **moment d'inertie**. C'est l'équivalent de la masse.

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \leftrightarrow \quad L_\Delta = J_\Delta \omega$$

Propriété :

Pour un point matériel : $J_\Delta = mr^2$ avec r la distance à l'axe Δ .



II.4 - Moment d'une force

a) Définition

Définition :

On appelle **moment d'une force** \vec{F} par rapport au point O :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Propriété :

$\vec{\mathcal{M}}_O$ est un vecteur perpendiculaire à \overrightarrow{OM} et \vec{F} , dirigé selon la règle de la main droite.

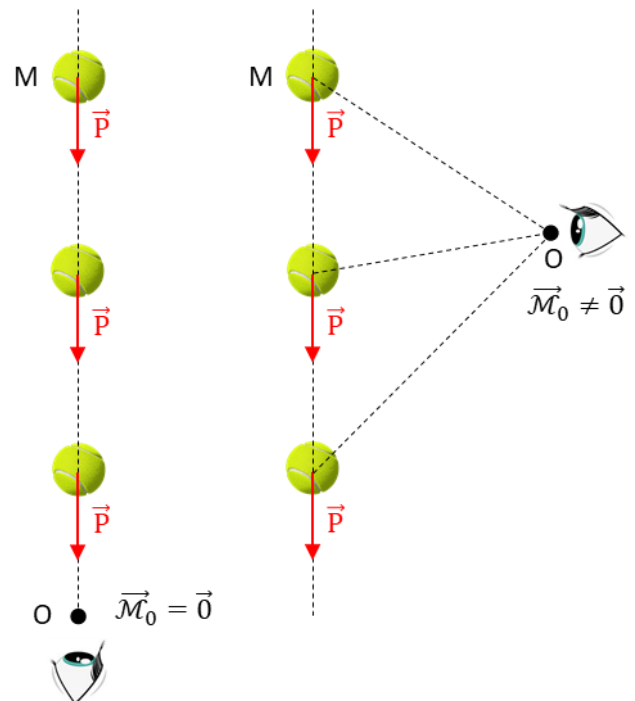
Définition :

On appelle **moment d'une force** \vec{F} par rapport à l'axe Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{u}_\Delta = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta$$

Propriété :

$\mathcal{M}_\Delta > 0$ si, lorsque la main droite suit la force, le pouce pointe dans la direction de \vec{u}_Δ .

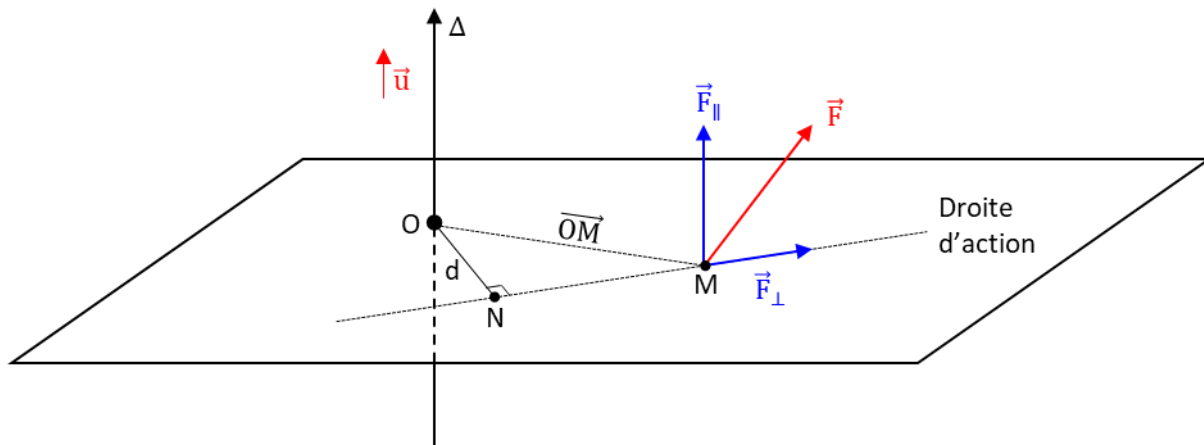


b) Bras de levier

Le moment $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})$ peut se déterminer graphiquement à l'aide de la notion de bras de levier.

Définition :

Le **bras de levier** d'une force \vec{F} par rapport à un axe Δ est la distance d entre la droite d'action de \vec{F}_\perp et l'axe Δ .



Propriété :

Le moment de \vec{F} par rapport à l'axe Δ vaut : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \pm d \|\vec{F}_\perp\|$. Le signe \pm se détermine à l'aide de la main droite.

Démonstration :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) &= (\overline{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{u}_\Delta = \left(\underbrace{\overline{OM} \wedge \vec{F}_\parallel}_{\perp \vec{u}_\Delta} + \overline{OM} \wedge \vec{F}_\perp \right) \cdot \vec{u}_\Delta = \left(\left(\overline{ON} + \underbrace{\overline{NM}}_{\parallel \vec{F}_\perp} \right) \wedge \vec{F}_\perp \right) \cdot \vec{u}_\Delta = (\overline{ON} \wedge \vec{F}_\perp) \cdot \vec{u}_\Delta \\ &= \pm d \|\vec{F}_\perp\| \end{aligned}$$

Interprétation physique :

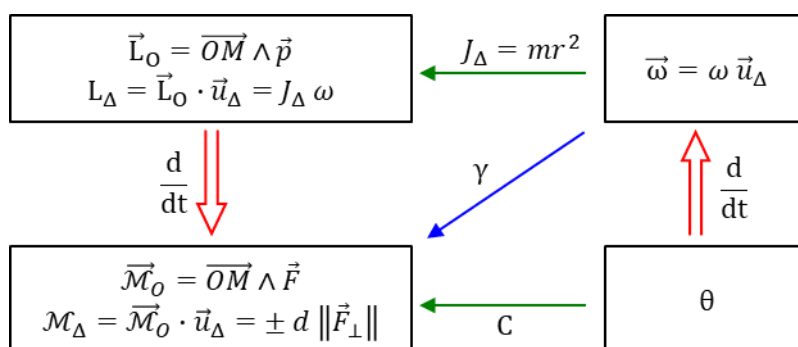
- o Seule la composante normale de la force permet de faire tourner M autour de Δ .
- o Pour une force de norme fixée, plus le bras de levier est grand, plus le moment est grand.

Application :

On place les poignées de porte le plus loin possible de l'axe de rotation.

II.5 - Bilan

Soit un axe fixe Δ dirigé par \vec{u}_Δ et $O \in \Delta$ un point fixe. Soit une masse ponctuelle m située à une distance r de Δ .



III - Théorème du moment cinétique

III.1 - Énoncé (TMC)

Soit \mathcal{R} un référentiel galiléen. Soit un axe fixe Δ dirigé par \vec{u}_Δ et un point fixe O appartenant à Δ . La dérivée temporelle du moment cinétique d'un système, par rapport à O ou Δ , est égale à la résultante des moments des forces extérieures, par rapport à O ou Δ , s'appliquant sur ce système.

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) \quad \text{et} \quad \frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext})$$

Démonstration :

On a :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) = \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge m\vec{v}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{dm\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_{ext} = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext})$$

Et :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} \cdot \vec{u}_\Delta = \sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) \cdot \vec{u}_\Delta \Rightarrow \frac{dL_O \cdot \vec{u}_\Delta}{dt} = \frac{dL_\Delta}{dt} = \sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext})$$

III.2 - Conservation du moment cinétique

En mécanique de translation, $\vec{p} = ct\vec{e}$ lorsque $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$, ie. lorsque le système est isolé ou pseudo isolé.

En mécanique de rotation, $\vec{L}_O = ct\vec{e}$ lorsque $\sum \vec{M}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{0}$, c'est-à-dire lorsque :

- $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ si le système est isolé ou pseudo isolé ;
- $\overrightarrow{OM} \parallel \vec{F}_{ext} \Leftrightarrow \boxed{\vec{F}_{ext} \propto \vec{e}_r}$ si les forces sont **centrales**, ie. sont toujours dirigées le long de la droite (OM).

IV - Application : le pendule simple

Déterminons l'équation du mouvement à l'aide du TMC.

Moment cinétique du point M :

Avec bras de levier

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{L_z = (\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u}_z = mR^2\dot{\theta}}$$

On trouve directement le résultant si on se souvient de la propriété :

$$L_z = mr^2 \cdot \omega$$

Bilan des moments :

Avec bras de levier

- La tension du fil \vec{T} : $\mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0$
- Le poids \vec{P} : $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -R \sin(\theta) \cdot mg$

Par le calcul

- La tension du fil \vec{T} : $\mathcal{M}_z(\vec{T}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{T}) \cdot \vec{u}_z = 0$
- Le poids \vec{P} :

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{u}_z = R \vec{e}_r \wedge mg(\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta) \cdot \vec{u}_z = -Rmg \sin(\theta) \left(\underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta}_{\vec{u}_z} \right) \cdot \vec{u}_z = -Rmg \sin(\theta)$$

On applique le TMC dans le référentiel terrestre galiléen.

$$\frac{dL_z}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{T}) + \mathcal{M}_z(\vec{P}) \Rightarrow mR^2\ddot{\theta} = -Rmg \sin(\theta) \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R} \sin(\theta) = 0}$$

