Mécanique classique | Chapitre 5 | Cours

M5 · Mouvement des particules chargées

Le LHC (Large Hadron Collider) est un accélérateur de particules mis en fonction en 2008 et situé dans la région frontalière entre la France et la Suisse. L'anneau principal fait environ $4{,}25\ \mathrm{km}$ de rayon. Des protons y sont accélérés à une vitesse de $0{,}999\ 999\ 991\ \mathrm{c}$, soit seulement $2{,}7\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ plus lent que la vitesse de la lumière. Lorsque des protons entre en collision, l'énergie libérée par le choc permet de créer de nouvelles particules ($\mathrm{E} = \mathrm{mc}^2$), et donc d'étudier les propriétés de la matière à l'échelle subatomique.

Dans ce cours, nous allons étudier le comportement des particules chargées dans un champ électrique et un champ magnétique. Nous nous plaçons dans la limite non relativiste ($\mathrm{v} \ll \mathrm{c}$) mais nous aborderons brièvement en fin de chapitre les corrections relativistes à apporter à la mécanique classique.

I - Introduction

I.1 - Champ électrique

Un **champ électrique**, noté $\vec{\mathrm{E}}$,est créé par la présence de charges électriques.

On admet le lien entre champ électrique et potentiel électrique : $\boxed{\vec{\mathrm{E}} = -\overrightarrow{grad}(V)}$

Remarque : c'est pour cela de V est toujours défini à une constante près.

Ordre de grandeur :

Source	Champ faible	Antenne mobile	Condensateur TP	Champ disruptif de l'air (foudre
$\|\vec{\mathbf{E}}\|\ (\mathbf{V \cdot m^{-1}})$	< 1	10 à 10^2	10^2 à 10^4	$3 \cdot 10^6$

I.2 - Champ magnétique

Un **champ magnétique**, noté $\vec{\mathrm{B}}$, est créé par la présence de courant électrique, c'est-à-dire par des charges en mouvement.

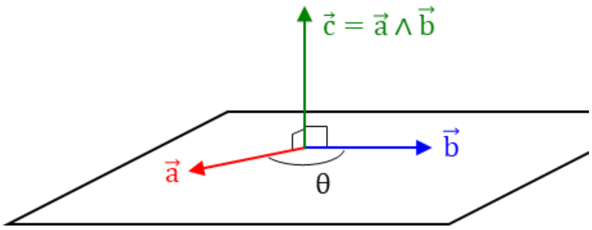
Ordres de grandeur :

Source	$\|\vec{\mathbf{B}}\|\ (\mathbf{T})$
Champ magnétique terrestre	$5 \cdot 10^{-5}$
Aimant permanant usuel	$0{,}1$ à 1
IRM (Imagerie par Résonance Magnétique)	5

I.3 - Produit vectoriel

Soit un espace muni d'une BOND. On appelle produit vectoriel :

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$$



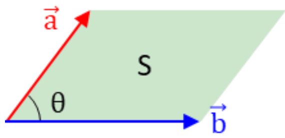
Avec :

- $\vec{c}$ est orthogonal à $\vec{a}$ et $\vec{b}$;
- $\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\| \, \left|\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)\right|$;
- $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ forme un **trièdre direct** (règle de la main droite).

<u>Propriétés et conséquence</u> :

- Le produit vectoriel est linéaire : $\vec{a} \wedge \left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\wedge\vec{b} + \vec{a}\wedge\vec{c}$
- Le produit vectoriel anti-commute : $\vec{a}\wedge\vec{b} = -\vec{b}\wedge\vec{a}$
- Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul : $\vec{a}\wedge\vec{b} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \sin(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \theta = 0 \; ou \; \pi \;\Rightarrow\; \vec{a} \propto \pm\vec{b}$
- Une BOND est un trièdre direct. On a alors : $\vec{e}_1\wedge\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2\wedge\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \qquad \vec{e}_3\wedge\vec{e}_1 = \vec{e}_2$
- La norme du produit vectoriel $\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\|$ est égale à l'aire du parallélogramme défini par $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

$$\left\|\vec{a}\wedge\vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \, \left\|\vec{b}\right\| \, |\sin(\theta)| = S$$



- Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \vec{c}}$$

II - Force de Lorentz

II.1 - Définition

a) Expression de la force

Soit une particule de charge q placé dans un champ $\vec{E}$ et $\vec{B}$. Elle subit la **force de Lorentz** :

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\wedge\vec{B}\right) = q\vec{E} + q\vec{v}\wedge\vec{B}}$$

b) Lien avec la force de Coulomb

<u>Rappel</u> de la loi de Coulomb décrit la force entre deux particules chargées :

$$\boxed{\vec{F}_{1/2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\,\vec{u}_r}$$

Avec : $\varepsilon_0 = 9{,}0 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ la permittivité diélectrique du vide.

Or la force (électrique) de Lorentz nous dit que : $\vec{F}_{1/2} = q_2\,\vec{E}_1$

On en déduit le champ électrique $\vec{E}_1$ crée par la charge ponctuelle q_1 (en coordonnées sphériques) :

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r^2}\,\vec{u}_r$$

<u>Remarque</u> : On en déduit le potentiel électrique crée par une charge ponctuelle :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) \quad\Rightarrow\quad V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}$$

c) Ordres de gradeur

Comparons la force de Lorentz aux forces de gravitation.

- On considère un proton dans un champ électrique et magnétique « standard » et dans le champ de pesanteur terrestre.

$$\|\vec{F}_{el}\| = \|q\vec{E}\| \sim 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 10^2 \simeq 10^{-17}\ \mathrm{N}$$

$$\|\vec{F}_{mag}\| = \|q\vec{v} \wedge \vec{B}\| \sim 1{,}6 \cdot 10^{-19} \times 10 \times 1 \simeq 10^{-17}\ \mathrm{N}$$

$$\|\vec{P}\| = \|m\vec{g}\| \sim 1{,}6 \cdot 10^{-27} \times 10 \simeq 10^{-26}\ \mathrm{N}$$

<u>Conclusion</u> : on ne prendra jamais en compte le poids des particules chargées.

- Rapport entre répulsion électrostatique et force de gravité entre deux protons :

$$\frac{\|\vec{F}_{el}\|}{\|\vec{F}_{grav}\|} = \frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}}{G\frac{m^2}{r^2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 G} \cdot \frac{e^2}{m^2} \sim \frac{1}{10 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-10}} \times \left(\frac{10^{-19}}{10^{-27}}\right)^2 = 10^{38}$$

<u>Conclusion</u> : on ne prendra jamais en compte les forces d'attractions gravitationnelles entre particules chargées.

II.2 - Puissance

Particule dans un champ électrique : $\mathcal{P}(\vec{F}_{el}) = q\vec{E} \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$

Particule dans un champ magnétique : $\mathcal{P}(\vec{F}_{mag}) = \underbrace{(q\vec{v} \wedge \vec{B})}_{\perp \vec{v}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0}$

<u>Conclusion</u> :

- Un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule.
- Un champ magnétique ne peut <u>**pas**</u> modifier l'énergie cinétique d'une particule. Il peut seulement courber la trajectoire (changer la direction de $\vec{v}$ sans changer la norme de $\vec{v}$).

III - Mouvement dans un champ électrique uniforme

III.1 - Trajectoire

On se place dans un référentiel galiléen.

Soit une particule de charge q soumise à : $\boxed{\vec{E} = \overrightarrow{cte} = E\,\vec{e}_z}$ et $\boxed{\vec{B} = \vec{0}}$.

Le PFD donne :

$$\boxed{m\vec{a} = q\vec{E}}$$

Puisque $\vec{E}$ est uniforme, on se trouve dans le cas d'un mouvement à vecteur accélération constant. La trajectoire est donc une parabole.

Conditions initiales : sur l'origine avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0(\cos(\alpha)\,\vec{u}_x + \sin(\alpha)\,\vec{u}_z)$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = \dfrac{qE}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0\cos(\alpha) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = \dfrac{qE}{m}\,t + v_0\sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0\cos(\alpha)\,t \\ y = 0 \\ z = -\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}\,t^2 + v_0\sin(\alpha)\,t \end{cases}$$

Trajectoire :

$$\boxed{z(x) = -\frac{qE/m}{2\,v_0^2\cos^2(\alpha)}\,x^2 + tan(\alpha)\,x}$$

III.2 - Énergie potentielle électrique

On utilise le lien entre champ électrique et potentiel électrique :

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E} = -q\,\overrightarrow{grad}(V) = -\,\overrightarrow{grad}(qV)$$

La force de Lorentz électrique est donc conservative. On cherche donc $\mathcal{E}_{p,el}$ tel que :

$$\vec{F}_{el} = -\,\overrightarrow{grad}(\mathcal{E}_{p,el}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_{p,el} = qV + cte}$$

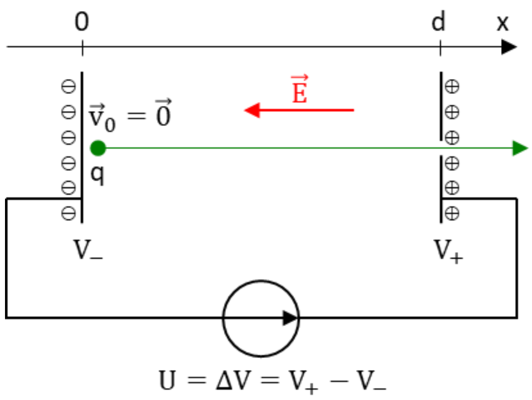
En prenant la constante d'intégration nulle, on obtient : $\boxed{\mathcal{E}_{p,el} = qV}$

Définition :

On exprime souvent l'énergie des particules en **électron-volt** : $\boxed{\mathcal{E}(\mathrm{eV}) = \frac{\mathcal{E}(\mathrm{J})}{e} = \frac{\mathcal{E}(\mathrm{J})}{1{,}6\cdot 10^{-19}}}$

III.3 - Vitesse en sortie d'un condensateur

On considère un condensateur qui possède une ddp $U = V_+ - V_- > 0$ entre ses deux armatures.



Propriété :

On admet que le champ électrique est constant à l'intérieur d'un condensateur.

Ainsi, le potentiel vaut :

$$\vec{E} = \overrightarrow{\mathrm{cte}} = -\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}}\,\vec{u}_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(x) = V_- + \frac{U}{d}x}$$

On en déduit le champ électrique :

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{dx}} = -\frac{U}{d}\vec{u}_x}$$

Hypothèse : un électron est arraché de l'armature en $x = 0$ sans vitesse initiale.

L'électron subit la force :

$$\vec{F}_{el} = q\vec{E} = +\frac{eU}{d}\vec{u}_x$$

C'est une force selon $+\vec{u}_x$. L'électron se dirige en ligne droite vers l'autre armature.

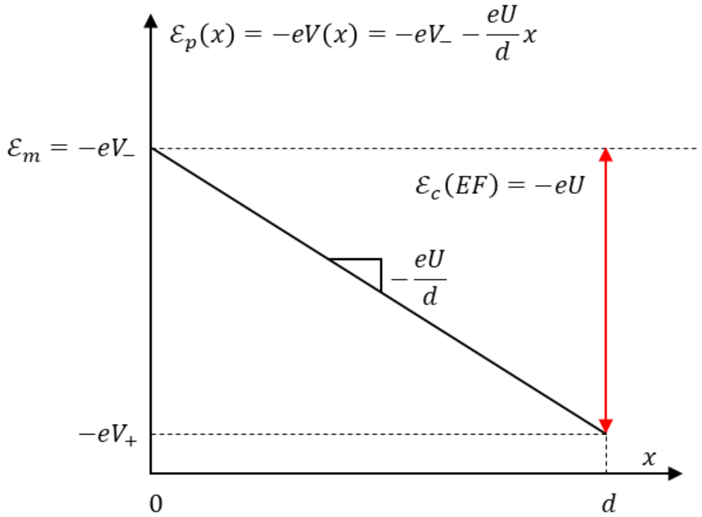
Quelle est sa vitesse de sortie en $x = d$?

On applique le TEM :

$$\Delta\mathcal{E}_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}m\mathrm{v}_s^2 - eV_+\right) - (0 - eV_-) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}m\mathrm{v}_s^2 = e(V_+ - V_-) = eU$$

On en déduit : $\boxed{\mathrm{v}_s = \sqrt{\frac{2eU}{m}}}$



IV - Mouvement dans un champ magnétique uniforme

IV.1 - Hypothèse de travail

On se place dans un référentiel galiléen.

Soit une particule de charge q soumise à : $\boxed{\vec{\mathrm{B}} = \overrightarrow{\mathrm{cte}} = \mathrm{B}\,\vec{\mathrm{e}}_z}$ et $\boxed{\vec{\mathrm{E}} = \vec{0}}$.

À l'instant initial, on suppose que la particule se trouve en O avec **une vitesse orthogonale** au champ magnétique : $\boxed{\vec{\mathrm{v}}_0 = \mathrm{v}_0\vec{\mathrm{e}}_y}$.

IV.2 - Trajectoire

Le PFD donne :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 0\\ B\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{y}B\\ -\dot{x}B\\ 0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y}\\ \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x}\\ \ddot{z} = 0\end{cases}$$

L'accélération selon z est nulle. Ainsi,

$$\ddot{z} = 0 \quad\Rightarrow\quad \dot{z} = cte = 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{z(t) = cte = 0}$$

Le mouvement reste dans le plan (Oxy). Ainsi, $\boxed{\vec{v}(t)\perp\vec{B}}$.

Nous n'allons pas chercher à résoudre cette équation différentielle. On va utiliser le repère de Frenet pour trouver la trajectoire.

Rappel : accélération dans le repère de Frenet :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

Or, un champ magnétique ne peut pas changer la norme de la vitesse, donc $\boxed{\|\vec{v}(t)\| = cte = v_0}$.

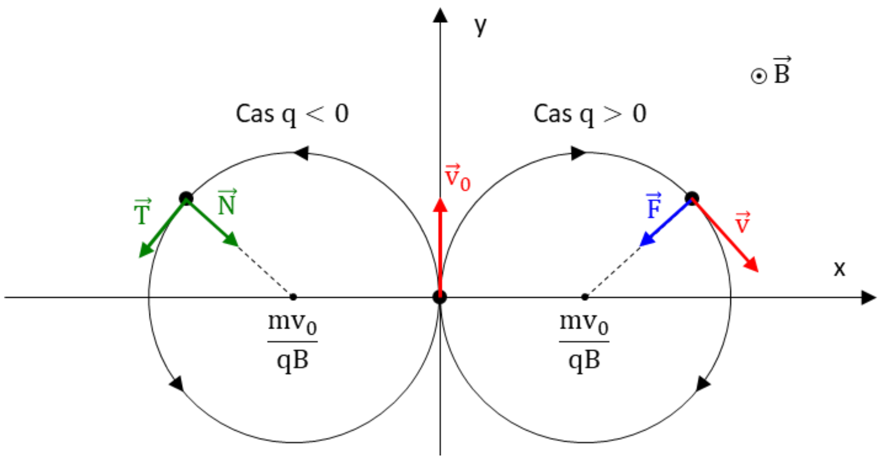
Ainsi,

$$\vec{a} = \frac{v_0^2}{R}\vec{N} = \frac{q}{m}\vec{v}\wedge\vec{B} \quad\Rightarrow\quad R = \frac{v_0^2\|\vec{N}\|}{\left\|\frac{q}{m}\vec{v}\wedge\vec{B}\right\|} = \frac{v_0^2}{|q|v_0B/m} = \frac{mv_0}{|q|B}$$

La particule évolue sur une trajectoire de rayon courbure est constante. La trajectoire est donc **circulaire**, de rayon :

$$\boxed{R = \frac{mv_0}{|q|B}}$$

Sens de parcours du cercle :



Bien retenir les étapes du raisonnement :

- PFD pour montrer que : $\boxed{z(t) = 0} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t)\perp\vec{B}}$
- TPC pour montrer que : $\boxed{\|\vec{v}(t)\| = cte = v_0}$
- $\oplus$ base de Frenet pour montrer que : $\boxed{R = \frac{mv_0}{|q|B}}$
- Sens de $\vec{F}_{mag}(t=0)$ pour déterminer le sens de parcours du cercle.

IV.3 - Pulsation cyclotron

Rappel : pour un mouvement circulaire uniforme, on a : $\vec{v} = R\omega\,\vec{u}_\theta$

On en déduit la vitesse angulaire, appelée **pulsation cyclotron** :

$$\boxed{\omega_c = \frac{\mathrm{v}_0}{R} = \frac{|q|B}{m}}$$

IV.4 - Résolution numérique de l'ED

Comment résoudre numériquement cette ED ?

Prenons $q > 0$, donc $\omega_c = \frac{qB}{m}$. On a :

$$\begin{cases} \ddot{\mathrm{x}} &= \dfrac{qB}{m}\dot{y} \\ \ddot{\mathrm{y}} &= -\dfrac{qB}{m}\dot{x} \\ \ddot{\mathrm{z}} &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathrm{v}}_x &= \omega_c\,\mathrm{v}_y \\ \dot{\mathrm{v}}_y &= -\omega_c\,\mathrm{v}_x \\ \dot{\mathrm{v}}_z &= 0 \end{cases}$$

On a trois ED d'ordre 1 couplées. On pose :

$$Y = \begin{pmatrix} \mathrm{v}_x \\ \mathrm{v}_y \\ \mathrm{v}_z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} \omega_c\,\mathrm{v}_y \\ -\omega_c\,\mathrm{v}_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
def deriv(y,t):
    dydt = [ωc*y[1], -ωc*y[0], 0]
    return dydt

t = np.linspace(0, tmax, 10000)
CI = [0, v0, 0]
vx, vy, vz = odeint(deriv, CI, t)
```