Mécanique classique | Chapitre 4 | Cours

M4 · Approche énergétique de la dynamique

<u>Idée du chapitre</u> :

PFD : Bilan de force

$\times \vec{v}$ ↓

Bilan de puissance

$\int dt$ ↓

Bilan d'énergie

Toutes ces descriptions sont équivalentes mathématiquement mais permettent de donner des points de départ à un exercice différents.

I - Travail et puissance d'une force

I.1 - Travail

a) Travail infinitésimal

Soit un référentiel $\mathcal{R}$. Soit M un point matériel soumis à une force $\vec{F}$.

<u>Définition</u> :

On appelle **travail infinitésimal** de la force $\vec{F}$ au cours d'un déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{OM}$ la quantité :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}}$$

<u>Unité</u> : Joule

Si $\delta W(\vec{F}) > 0$, la force est dite **motrice** (elle « aide » M à avancer).

Si $\delta W(\vec{F}) < 0$, la force est dite **résistive** (elle s'oppose au mouvement).

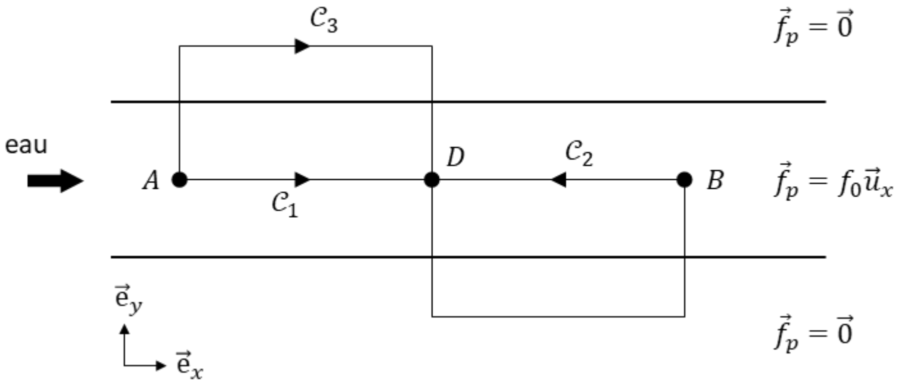
<u>Remarques</u> :

On utilise la notation δ pour indiquer la **quantité infinitésimale** d'une grandeur (ici, une quantité d'énergie).

On utilise la notation d pour indiquer la **variation infinitésimale** d'une grandeur (ici, la position).

Le travail n'est pas une **fonction** $W(x, y, z, t)$ car il dépend *a priori* du chemin suivi par le point M. On ne peut donc pas écrire la variation de cette fonction : dW.

<u>Exemple</u> :



En tout point de l'espace, on peut définir la force de pression qu'exerce l'eau sur l'homme : $\vec{f}_p(x, y, z, t)$. La force est une fonction.

On imagine trois chemins $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$. Que vaut $\delta W(\vec{f_p})$ au niveau du point D ?

- $\delta W_1(\vec{f_p}) = f_0\vec{u}_x \cdot dx\,\vec{u}_x = f_0 dx > 0$ force motrice
- $\delta W_2(\vec{f_p}) = f_0\vec{u}_x \cdot (-dx\,\vec{u}_x) = -f_0 dx < 0$ force résistive
- $\delta W_3(\vec{f_p}) = f_0\vec{u}_x \cdot (-dy\,\vec{u}_y) = 0$ force ni motrice, ni résistive

δW d'une quantité d'énergie échangée entre l'eau et l'homme au cours du déplacement.

b) Travail sur un chemin

Définition :

On appelle **travail** de la force $\vec{F}$ au cours du chemin allant de A à B la quantité :

$$\boxed{W(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}}$$

Remarque :

On utilise « aucune notation » pour indiquer la **valeur** d'une grandeur.

On utilise la notation Δ pour indiquer la **variation macroscopique** d'une grandeur (ici, la position).

Bilan :

	Infinitésimal	Macroscopique
Variation de fonction	df	$\Delta f = \int df$
Quantité échangée	δW	$W = \int \delta W$

I.2 - Puissance

Définition :

On appelle **puissance** de la force $\vec{F}$ est la quantité de travail échangée par unité de temps.

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Unité : Watts

Si $\mathcal{P}(\vec{F}) > 0$, la force est dite **motrice**.

Si $\mathcal{P}(\vec{F}) < 0$, la force est dite **résistive**.

I.3 - Théorèmes énergétiques

a) Théorème de la puissance cinétique (TPC)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un système est égale à la puissance des forces extérieures s'appliquant sur ce système.

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum \mathcal{P}_{ext}}$$

Démonstration :

On part du PFD, on multiplie par $\vec{v}$:

$$\frac{dm\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \sum \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{ext})$$

b) Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation temporelle de l'énergie cinétique d'un système entre deux points A et B égale au travail des forces extérieures le long du chemin (AB).

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_\mathrm{c} = \sum \mathrm{W}_\mathrm{ext}}$$

Démonstration :

On intègre le TPC :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{dt}} = \sum \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext} \cdot \vec{\mathrm{v}} \quad \Rightarrow \quad \int_A^B \mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{c} = \sum \left(\int_A^B \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{dt}}\, \mathrm{dt} \right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathcal{E}_\mathrm{c} = \sum \left(\int_A^B \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \right) = \sum \mathrm{W}\left(\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext}\right)$$

II - Énergie potentielle

II.1 - Forces conservatives

Une force $\vec{\mathrm{F}}$ est dite **conservative** s'il existe une fonction $\mathcal{E}_\mathrm{p}$ nommée énergie potentielle telle que :

$$\boxed{d\mathcal{E}_p = -\delta W(\vec{F})} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} = -\mathcal{P}(\vec{F})} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_p)}$$

II.2 - L'opérateur gradient

a) Définition

Approche intuitive du gradient :

$$d\mathcal{E}_p = -\delta W(\vec{F}) = -\vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d\mathcal{E}_p = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_p) \cdot d\overrightarrow{OM}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_p) = \frac{d\mathcal{E}_p}{d\overrightarrow{OM}}}$$

⚠⚠⚠ **Écriture fausse car il est interdit diviser par un vecteur !!**

Conclusion : intuitivement, le gradient d'une fonction est sa dérivée par rapport toutes les coordonnées **d'espace** (pas par rapport au temps !!!).

Approche rigoureuse :

Admis : différentielle une fonction de plusieurs variables

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Avec ∂ la dérivée partielle.

On constate que :

$$df = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dy \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

Ainsi (**expression à connaitre en cartésien uniquement**) :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z}$$

Remarque :

Dans le cas d'une fonction à une seule variable $f(x)$:

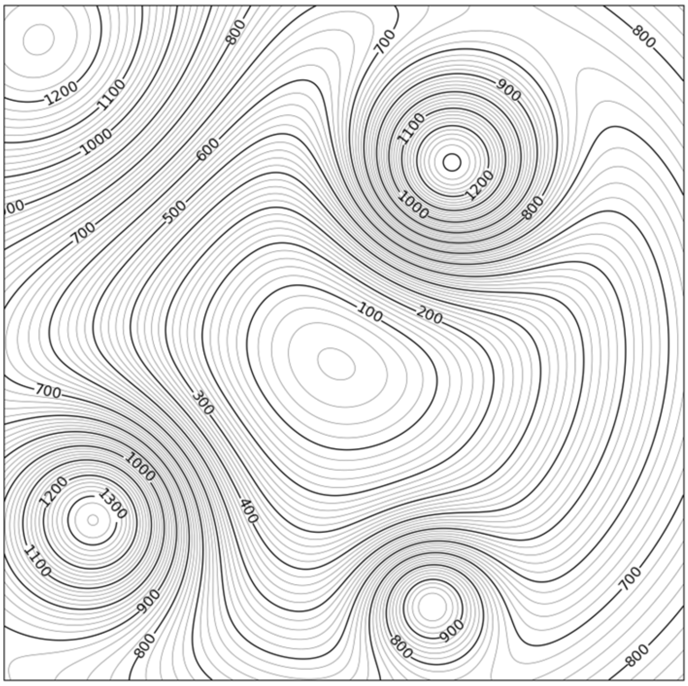
$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{df}{dx}\vec{u}_x$$

Le gradient s'identifie à la dérivée spatiale de f.

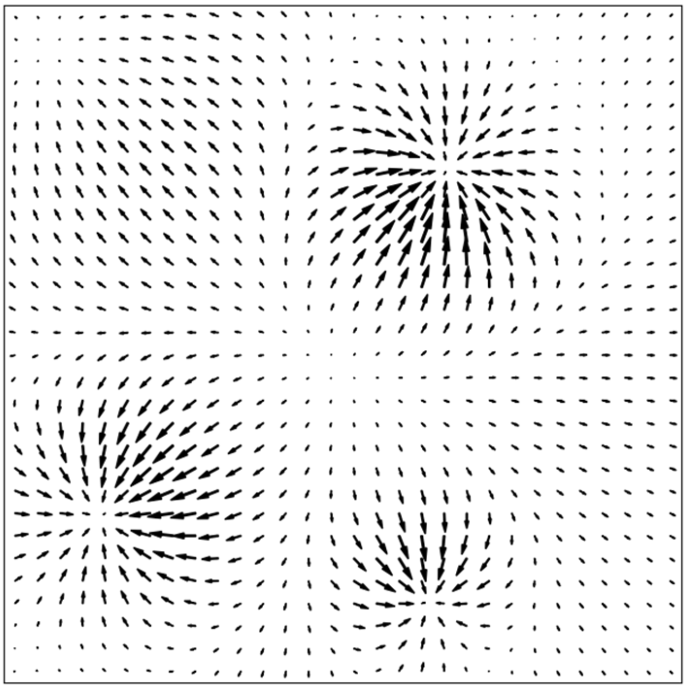
b) Propriétés

Soit une carte d'altitude $h(x, y)$.

$h(x, y)$



$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(h)$



<u>Rappel</u> : $\mathrm{d}h = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(h) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$

Direction de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(h)$

- Soit un chemin à altitude constante $\mathrm{d}h = 0$ (un iso-h).
- Alors $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(h) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = 0$,
- Donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(h)$ est en tout point ⊥ à ce chemin, ie. $\overrightarrow{\mathbf{grad}}(\boldsymbol{h})$ **aux iso-h**.

Sens de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(h)$

- Soit un chemin ⊥ aux iso-h et dirigé vers les h croissants ($\Rightarrow dh > 0$).
- Donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(h) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} > 0$,
- Donc $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(h) \propto +\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$. Donc $\overrightarrow{\mathbf{grad}}(\boldsymbol{h})$ **est orienté vers les valeurs croissantes de** $\boldsymbol{h}$**.**

c) Conclusion : lien force / énergie potentielle

Soit une carte d'énergie potentielle $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x, y, z)$ alors la force $\boxed{\vec{\mathrm{F}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_\mathrm{p})}$ est toujours perpendiculaire aux iso-$\mathcal{E}_\mathrm{p}$ et orientée vers les valeurs décroissantes de $\mathcal{E}_\mathrm{p}$.

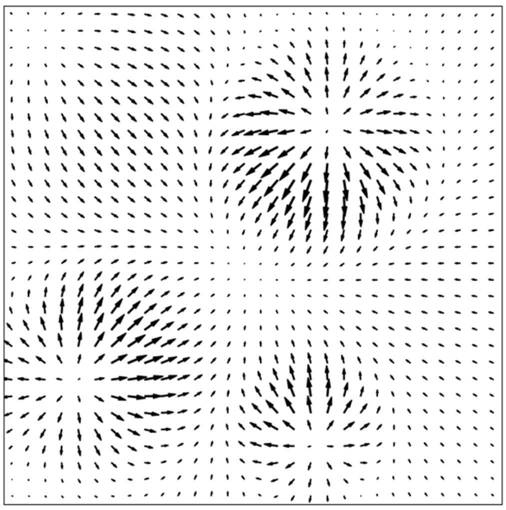
<u>Exemple</u> :

Admettons que la carte précédente représente l'énergie potentielle d'une particule qui évolue dans un plan (x, y). Alors cette particule subit une force :

<u>Propriétés</u> :

- La force est nulle aux maxima et minima de $\mathcal{E}_\mathrm{p}$.
- La force tend toujours à éloigner le système des maxima et à le diriger vers les minima
- Les minima sont les positions d'équilibres stables du système.

$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_p)$



d) Application : calcul d'une force

<u>Application</u> :

On donne l'énergie potentielle suivante :

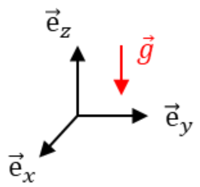
$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}} = 3x^2 + 2xy^2 + 5yz + 1$$

Déterminer l'expression de la force :

$$\vec{\mathrm{F}} = -\begin{pmatrix} \partial\mathcal{E}_{\mathrm{p}}/\partial x \\ \partial\mathcal{E}_{\mathrm{p}}/\partial y \\ \partial\mathcal{E}_{\mathrm{p}}/\partial z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 6x + 2y^2 \\ 4x + 5z \\ 5y \end{pmatrix}$$

II.3 - Énergies potentielles à connaître

a) Énergie potentielle de pesanteur



Soit la force :

$$\vec{P} = -mg\,\vec{u}_z$$

On cherche $\mathcal{E}_{\mathrm{pp}}$ telle que :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_{\mathrm{pp}}) = -\vec{P} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\frac{\partial\mathcal{E}_{\mathrm{pp}}}{\partial x}}_{=0}\,\vec{u}_x + \underbrace{\frac{\partial\mathcal{E}_{\mathrm{pp}}}{\partial y}}_{=0}\,\vec{u}_y + \frac{\partial\mathcal{E}_{\mathrm{pp}}}{\partial z}\,\vec{u}_z = +mg\,\vec{u}_z \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{pp}} = mgz + cte}$$

La constante d'intégration est libre, elle n'a aucun sens physique.

Souvent, on choisit $cte = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{pg}} = +mgz} \quad \text{si l'axe (Oz) est orienté vers le haut}$$

Attention ! L'expression dépend de l'orientation de l'axe (Oz). Si $\vec{P} = m\vec{g} = +mg\,\vec{u}_z$, alors :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{pg}} = -mgz} \quad \text{si l'axe (Oz) est orienté vers le bas}$$

b) Énergie potentielle gravitationnelle

Force gravitationnelle :

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u}_r$$

On cherche $\mathcal{E}_{\mathrm{pg}}$ telle que :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_{\mathrm{pg}}) = -\vec{F} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\mathcal{E}_{\mathrm{pg}}}{\partial r}\,\vec{u}_r = +G\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\vec{u}_r \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathcal{E}_{pg} = -G\frac{m_1 m_2}{r} + cte}$$

Avec $cte = 0$, on a :

$$\boxed{\mathcal{E}_{pg} = -G\frac{m_1 m_2}{r}}$$

c) Énergie potentielle élastique

Force de rappel élastique :

$$\vec{\mathrm{F}} = -\mathrm{k}(\ell - \ell_0)\,\vec{\mathrm{u}}_x$$

De plus, plaçons l'origine en O :

$$x(t) = \ell(t) \quad\Rightarrow\quad dx = d\ell$$

On cherche $\mathcal{E}_{\mathrm{p,el}}$ telle que :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathcal{E}_{\mathrm{p,el}}) = -\vec{F} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\mathcal{E}_{\mathrm{p,el}}}{\partial x}\,\vec{u}_x = \mathrm{k}(\ell - \ell_0)\,\vec{u}_x \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathcal{E}_{\mathrm{p,el}} = \frac{1}{2}\mathrm{k}(\ell - \ell_0)^2 + cte}$$

III - Énergie mécanique

III.1 - Définition

On appelle énergie mécanique la somme de l'énergie cinétique et de l'ensemble des énergies potentielles.

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \sum \mathcal{E}_{p,i}}$$

III.2 - Théorèmes énergétiques

a) Théorème de la puissance mécanique (TPM)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique d'un système est égale à la puissance des forces extérieures non conservatives s'appliquant sur ce système.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{m}}{\mathrm{dt}} = \sum \mathcal{P}_\mathrm{ext,nc}}$$

Démonstration :

On part du TPC :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{c}}{\mathrm{dt}} = \sum \mathcal{P}_\mathrm{ext} = \sum \left(\mathcal{P}_\mathrm{ext,c} + \mathcal{P}_\mathrm{ext,nc}\right) = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{dt}} + \sum \mathcal{P}_\mathrm{ext,nc} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\mathcal{E}_\mathrm{c} + \mathcal{E}_\mathrm{p}\right) = \sum \mathcal{P}_\mathrm{ext,nc}$$

Conséquences :

L'énergie mécanique d'un système se **conserve** ($\mathcal{E}_\mathrm{m} = cte$) si :

- Il n'est soumis qu'à des forces conservatives ;
- $\mathcal{P}_\mathrm{ext,nc} = 0 = \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext,nc} \cdot \vec{\mathrm{v}}$ → lorsque les forces non conservatives sont orthogonales à la vitesse (c'est le cas de la tension d'un fil, de la réaction normale du support).

On parle alors de **mouvement conservatif**.

Dans le cas contraire, l'énergie mécanique du système varie :

- $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ diminue si $\mathcal{P}_\mathrm{ext,nc} < 0$, donc si $\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext,nc}$ est résistive (force de frottement).
- $\mathcal{E}_\mathrm{m}$ augmente si $\mathcal{P}_\mathrm{ext,nc} > 0$, donc si $\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext,nc}$ est motrice.

b) Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation temporelle de l'énergie mécanique d'un système entre deux points A et B égale au travail des forces extérieures non conservatives le long du chemin (AB).

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_\mathrm{m} = \sum \mathrm{W}_\mathrm{ext,nc}}$$

Démonstration :

On intègre le TPM :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{m}}{\mathrm{dt}} = \sum \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext,nc} \cdot \vec{\mathrm{v}} \quad \Rightarrow \quad \int_A^B \mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{m} = \sum \left(\int_A^B \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext,nc} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{dt}}\, \mathrm{dt} \right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\mathcal{E}_m = \sum \left(\int_A^B \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext,nc} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} \right) = \sum \mathrm{W}\left(\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{ext,nc}\right)$$

III.3 - Quel théorème utiliser ?

On peut utiliser :

$(PFD) : \ m\vec{a} = \vec{F}_{ext} \quad (TPC) : \ \dot{\mathcal{E}}_\mathrm{c} = \mathcal{P}_{ext} \quad (TPM) : \ \dot{\mathcal{E}}_\mathrm{m} = \mathcal{P}_{ext,nc} \quad (TEC) : \Delta\mathcal{E}_\mathrm{c} = \mathrm{W}_{ext} \quad (TEM) : \Delta\mathcal{E}_\mathrm{m} = \mathrm{W}_{ext,nc}$

- Si on cherche l'équation du mouvement : PFD, TPC ou TPM.
- Si on cherche un état final connaissant un état initial : TEC ou TEM.

IV - Mouvement conservatif à une dimension

IV.1 - Analyse d'une courbe d'énergie potentielle

On se limite à présent au cas où $\mathcal{E}_p$ dépend d'une unique variable.

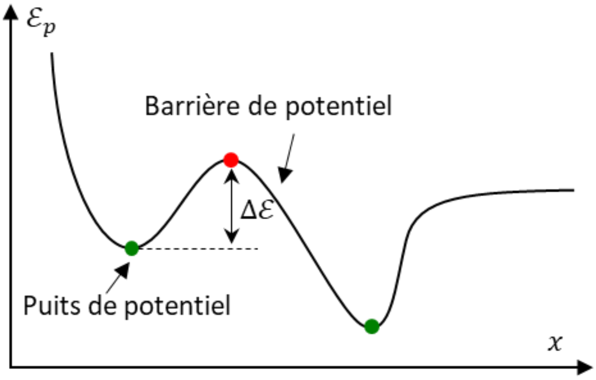
$$\mathcal{E}_p(x)$$

On rappelle que :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\mathcal{E}_p) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\,\vec{u}_x$$

Ainsi,

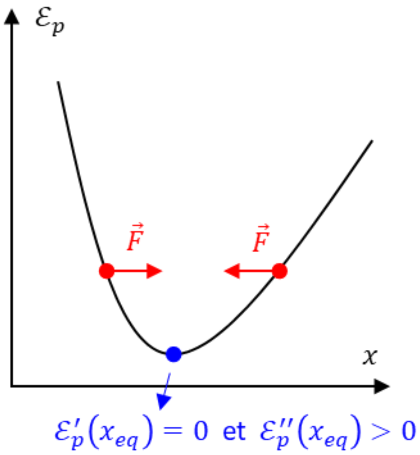
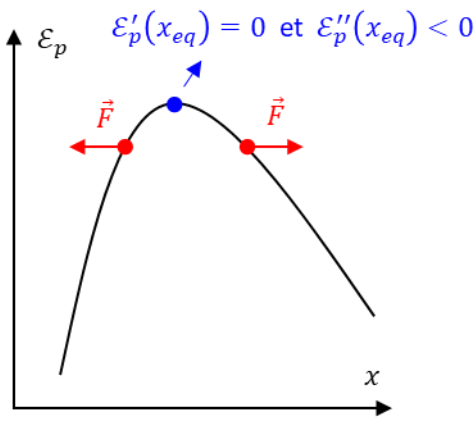
$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F} = \vec{0}}$$



Une **position d'équilibre** est une position où le système ne subit aucune force. Cela correspond aux extrema (minima et maxima) de la courbe $\mathcal{E}_p(x)$.

Elle est dite **stable** (resp. **instable**) si, proche de l'équilibre, le système subit une force qui le ramène vers l'équilibre (resp. l'éloigne de l'équilibre).

Bilan :

Équilibre stable	Équilibre instable
	

IV.2 - Nature du mouvement

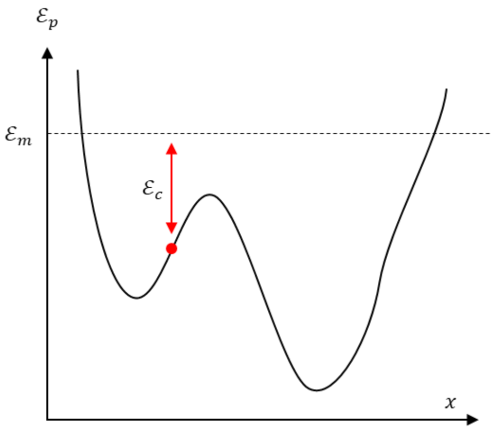
On considère un mouvement conservatif (⇒ système soumis qu'à des forces conservatives). D'après le TPM :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}_m(t) = cte$$

Puisque $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ et que $\mathcal{E}_c \geq 0$, on a toujours : $\boxed{\mathcal{E}_p \leq \mathcal{E}_m}$. En cas d'égalité, la vitesse du système est nulle.

Conséquence :

Sur le profil énergétique, l'$\mathcal{E}_p$ du système ne peut jamais dépasser la droite horizontale $\mathcal{E}_m = cte$. Lorsqu'il atteint ce point, la vitesse devient nulle (car $\mathcal{E}_c = 0$) puis le système fait demi-tour.



Définitions :

Un **état de diffusion** est un état permettant au système de s'éloigner vers l'infini. Dans ce cas, la trajectoire est **non bornée**.

Si le système ne peut pas s'éloigner à l'infini, on parle d'**état lié**. Dans ce cas, la trajectoire est **bornée**.

Propriété :

Dans le cas des mouvements conservatifs à une dimension, toute trajectoire bornée correspond à un **mouvement périodique**.

Application :

On lâche un objet dans le champ de pesanteur terrestre à une altitude $h = 10\ m$, sans vitesse initiale. Que vaut sa vitesse au niveau du sol ?

C'est un mouvement conservatif, donc le TEM donne :

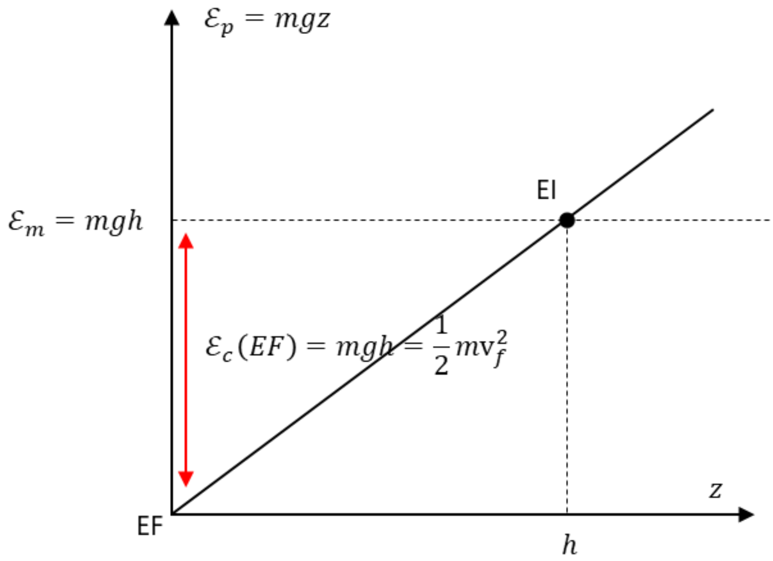
$$\Delta\mathcal{E}_m = 0$$

Ainsi,

$$\underbrace{mgh + 0}_{EI} = \underbrace{0 + \frac{1}{2}m\mathrm{v}_f^2}_{EF}$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{v}_f = \sqrt{2gh}}$$



IV.3 - Mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable

a) Approximation harmonique

On se place proche d'une position d'équilibre stable :

$$\boxed{x(t) = x_{eq} + \varepsilon(t)}$$

Avec ε très petit.

On utilise le développement de Taylor de $\mathcal{E}_\mathrm{p}(x)$ au voisinage de cette position d'équilibre.

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}\left(x_{eq} + \varepsilon(t)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\mathcal{E}_p^{(n)}(x_{eq})$$

On parle d'**approximation harmonique** lorsqu'on limite le DL à l'ordre 2 :

$$\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) \simeq \mathcal{E}_\mathrm{p}(x_{eq}) + \varepsilon\, \mathcal{E}_p'(x_{eq}) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mathcal{E}_p''(x_{eq})$$

Or, il s'agit d'une position :

- **d'équilibre** $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{E}_p'(x_{eq}) = 0}$
- **stable** $\Rightarrow$ $\boxed{\mathcal{E}_p''(x_{eq}) = k > 0}$

Conclusion :

Dans l'approximation harmonique, proche d'une position d'équilibre stable, l'énergie potentielle s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{E}_\mathrm{p}(x) \simeq \mathcal{E}_\mathrm{p}(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2} \quad \text{avec :} \quad k > 0$$

Que l'on appelle un **puit de potentiel harmonique**.

Cela correspond à une force :

$$\boxed{\vec{\mathrm{F}} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{p}}{\mathrm{dx}}\,\vec{\mathrm{u}}_\mathrm{x} = -\mathrm{k}(\mathrm{x} - \mathrm{x_{eq}})\,\vec{\mathrm{u}}_\mathrm{x}}$$

Il s'agit d'une **force de rappel élastique**.

b) Équation différentielle du mouvement

Le mouvement étant conservatif, le TPM donne :

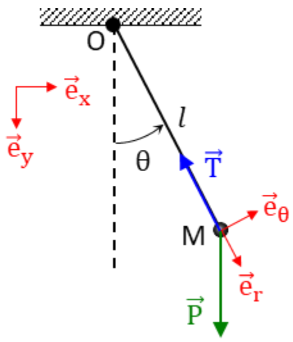
$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad m\dot{x}\ddot{x} + k\dot{x}(x - x_{eq}) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{k}{m}x_{eq}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2\, x(t) = \omega_0^2\, x_{eq}}$$

Conclusion : **Autour de toute position d'équilibre stable**, un système se comporte toujours comme un **oscillateur harmonique**.

V - Application : le pendule simple

V.1 - Profil énergétique

Soit un pendule simple dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen.



On rappelle :

$$\overrightarrow{OM} = L\,\vec{e}_r \qquad \vec{v} = L\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

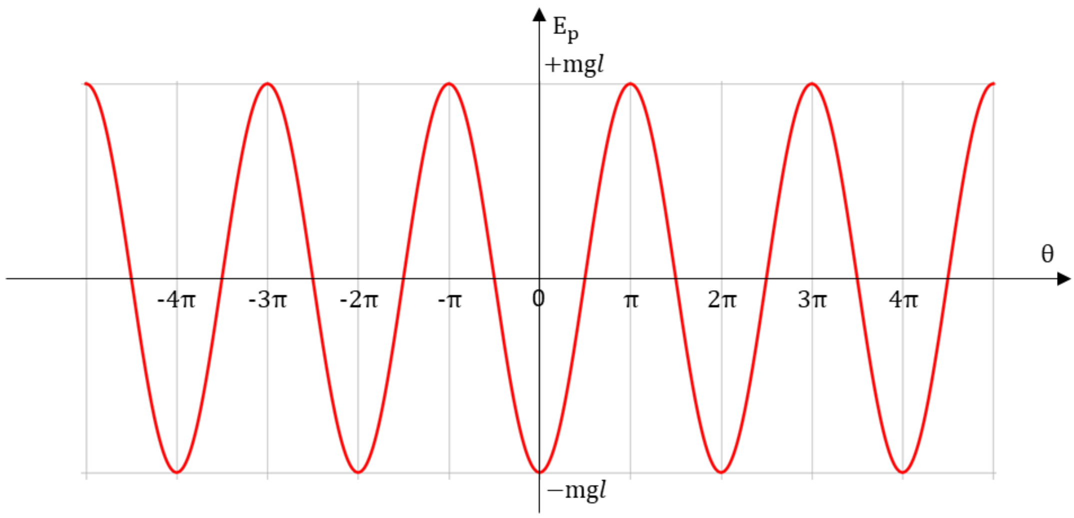
Force non conservative :

Tension du fil, qui ne travaille pas : $\mathcal{P}(\vec{T}) = \vec{T}\cdot\vec{v} = 0$

Énergie potentielle :

$$\boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = -mgy = -mgL\cos(\theta)}$$

On en déduit le profil énergétique :



+ commentaire : positions d'équilibres stables, instables…

V.2 - Équation du mouvement

On applique le TPM :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos(\theta)\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta}\sin(\theta) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0}$$

On retrouve bien l'ED du pendule.

Définition :

On appelle **intégrale première du mouvement** une fonction qui reste constante au cours du mouvement.

Dans les exercices mettant en jeu uniquement des forces conservatives, l'intégrale première du mouvement est :

$$\boxed{\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(0)}$$

Ici, on a donc :

$$\boxed{\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos(\theta) = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta_0}^2 - mgL\cos(\theta_0)}$$

V.3 - Approximation harmonique

On se place proche de la position d'équilibre $\theta_{eq} = 0$.

On pose : $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$

- L'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_p = -mgL\cos(\theta) \simeq -mgL\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)$$

- Équation du mouvement

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mL^2\dot{\varepsilon}^2 - mgL\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)\right) = 0 \\ &\Rightarrow \quad mL^2\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} + mgL\dot{\varepsilon}\varepsilon = 0 \\ &\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{L}\varepsilon = 0}\end{aligned}$$

On obtient donc : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = \frac{g}{L}\theta_{eq}}$

V.4 - Résolution numérique

Objectif : résoudre numériquement l'ED du pendule simple.

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\sin(\theta) = 0} \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Difficulté : c'est une ED d'ordre 2.

Méthode :

- Convertir l'ED sur θ de degré 2 en deux ED couplées sur θ et ω de degré 1.
- Résoudre chaque ED de degré 1 numériquement (méthode d'Euler, odeint ou autre).

Application :

On pose le vecteur Y :

$$\mathrm{Y(t)} = \begin{pmatrix}\theta \\ \omega\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{dY}}{\mathrm{dt}} = \begin{pmatrix}\dot{\theta} \\ \dot{\omega}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega \\ -\omega_0^2\sin(\theta)\end{pmatrix}$$

On obtient bien deux ED couplées de degré 1.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = \omega(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}} = -\omega_0^2\sin\big(\theta(\mathrm{t})\big)\end{cases}$$

On obtient deux ED de degré 1.

Résolution par la méthode d'Euler

On a :

$$\begin{cases} \dfrac{\theta(\mathrm{t}+\mathrm{dt})-\theta(t)}{\mathrm{dt}} = \omega(t) \\ \dfrac{\omega(\mathrm{t}+\mathrm{dt})-\omega(t)}{\mathrm{dt}} = -\omega_0^2\sin\big(\theta(\mathrm{t})\big) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta(\mathrm{t}+\mathrm{dt}) = \theta(t)+\omega(t)\cdot dt \\ \omega(\mathrm{t}+\mathrm{dt}) = \omega(\mathrm{t})-\omega_0^2\sin\big(\theta(\mathrm{t})\big)\cdot dt \end{cases}$$

Connaissant $\theta(0)$ et $\omega(0)$, on peut connaitre $\theta(t)$ et $\omega(\mathrm{t})$ en les calculant de proche en proche (faire une boucle).

Résolution par odeint

On va stocker θ et ω dans une liste $Y = [\theta, \omega]$. On a donc : $\theta = Y[0]$ et $\omega = Y[1]$.

On en déduit : $\frac{dY}{dt} = [Y[0], -\omega_0^2\sin(\mathrm{Y}[0])]$.

```
def deriv(y,t):
    dydt = [y[1], ω0**2*np.sin(y[0]*t)]
    return dydt

t = np.linspace(0, t_max, 10000)
CI = [θ_0, ω_0]
θ, ω = odeint(deriv, CI, t)
```