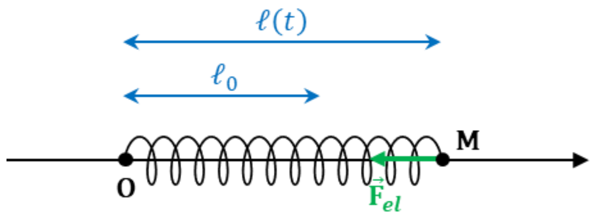
Mécanique classique | Chapitre 3 | Cours

M3 · Oscillateurs mécaniques

I - Force de rappel élastique

I.1 - Loi de Hooke

Soit M point matériel attaché à l'extrémité d'un ressort. On note O l'autre extrémité du ressort.



Le point M subit une **force de rappel élastique**, donnée par la **loi de Hooke** :

$$\boxed{\vec{F}_{el}(t) = -k(\ell(t) - \ell_0)\,\vec{u}_{OM}}$$

Avec :

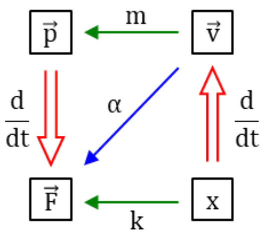
- k la **constante de raideur** du ressort ;
- ℓ_0 la **longueur à vide** = longueur du ressort en l'absence de toute contrainte (⚠ ce n'est pas la longueur du ressort à l'instant initial) ;
- $\ell(t)$ la longueur du ressort à l'instant t ;
- $\vec{u}_{OM}$ **vecteur unitaire** dirigé de O vers M

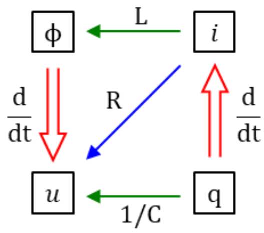
Remarques :

- Si $\ell(t) > \ell_0$, la force estattractive et si $\ell(t) < \ell_0$, la force est répulsive.
- La loi de Hooke n'est valable que pour les petites élongations : $|\ell(t) - \ell_0| \ll \ell_0$.

I.2 - Analogie électromécanique

Nous verrons dans tous le chapitre qu'il existe une forte analogie entre l'électrocinétique et la mécanique.





Interprétation :

- Bobine ↔ inertie des systèmes électriques
- Résistance ↔ force de frottement fluide
- Condensateur ↔ ressort

À l'aide de l'analogie, on peut anticiper que :

- Système masse-ressort ⇔ circuit LC ⇒ oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 \left(= \frac{1}{\sqrt{LC}}\right) = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Avec frottement fluide ⇔ circuit RLC ⇒ oscillateur amorti de facteur de qualité $Q\left(=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\right)=\frac{\sqrt{km}}{\alpha}$.

II - Oscillateur harmonique

II.1 - Mise en équation et choix de l'origine

Considérons que O est un point fixe. La masse M est placé sur un support : le poids et la réaction normale du support se compense parfaitement (on ne va pas les écrire).

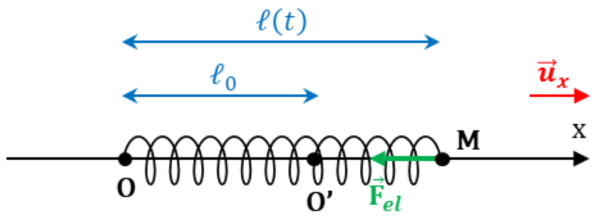
On applique le **principe fondamental de la dynamique** (PFD) dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\boxed{m\,\vec{a}=\vec{F}_{el}}$$

Déterminons la position d'équilibre de la masse. On applique le PFD à l'équilibre :

$$\vec{0}=\vec{F}_{el}\quad\Rightarrow\quad 0=-k\big(\ell_{\text{eq}}-\ell_0\big)\,\vec{u}_{OM}\quad\Rightarrow\quad\boxed{\ell_{\text{eq}}=\ell_0}$$

Plaçons un repère cartésien avec l'axe (x) confondu avec l'axe (OM). Il y a deux choix pertinents pour placer l'origine du repère.



	Origine à l'extrémité du ressort O	Origine à la position d'équilibre O′
Vecteur position	$\vec{x}(t)=\overrightarrow{OM}\,\vec{u}_x=\ell(t)\,\vec{u}_x$	$\vec{x}(t)=\overrightarrow{O'M}=(\ell(t)-\ell_0)\,\vec{u}_x$
Lien entre $\ell(t)$ et $x(t)$	$\ell(t)=x(t)$	$\ell(t)=x(t)+\ell_0$
Force de rappel	$\vec{F}_{el}(t)=-k(x(t)-\ell_0)\,\vec{u}_x$	$\vec{F}_{el}(t)=-k\,x(t)\,\vec{u}_x$
PFD	$m\ddot{x}=-k(x(t)-\ell_0)$	$m\ddot{x}=-k\,x(t)$
ED forme canonique	$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2\,x(t)=\omega_0^2\,\ell_0}$	$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2\,x(t)=0}$

Avec : $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$ la pulsation propre du système.

On retrouve bien un OH dont la forme canonique générale de l'ED est :

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_0^2\,x(t)=\omega_0^2\,x_{\text{eq}}}$$

⚠ avec x_{eq} la position d'équilibre, qui dépend du choix de l'origine de l'axe.

Rappel :

La solution de l'ED vaut :

$$x(t)=x_{eq}+A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$$

II.2 - Bilan énergétique

Méthode (par analogie) :

- Écrire le PFD (⇔ écrire la loi des mailles).
- Multiplier par $\vec{v}$ pour avoir un bilan de puissance (⇔ multiplier par i).
- Intégrer pour avoir un bilan d'énergie.

PFD projeté sur l'axe (Ox) : $m\ddot{x} = -k(\ell(t) - \ell_0)$

Bilan de puissance : $m\ddot{x}\dot{x} = -k\dot{x}(\ell(t) - \ell_0)$

Lien entre $\ell(t)$ et $\dot{x}$ (quelque soit le choix de l'origine du repère) : $\dot{x} = \dot{\ell}$

On en déduit :

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} = -k(\ell(t) - \ell_0)\frac{d\ell}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}k(\ell(t) - \ell_0)^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{\frac{1}{2}k(\ell(t) - \ell_0)^2}_{\mathcal{E}_p}\right) = 0$$

Propriété :

L'énergie stockée par un ressort, appelée énergie potentielle élastique, vaut :

$$\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell(t) - \ell_0)^2$$

Remarque :

On retrouve par analogie :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_{mag} = \frac{1}{2}Li^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell(t) - \ell_0)^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_{el} = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Conclusion :

$\mathcal{E}_m$ l'énergie mécanique $= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ se conserve au cours du temps (normal car pas de frottement).

III - Oscillateur amorti

III.1 - Mise en équation

On reprend l'étude précédente mais on ajoute une force de frottement visqueux : $\vec{f}(t) = -\alpha\,\vec{\mathrm{v}}(t) = -\alpha\,\dot{x}\,\vec{u}_x$.

Prenons l'origine au point O. Le PFD donne :

$$m\,\vec{a} = \vec{F}_{el} + \vec{f} \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{x}\,\vec{u}_x = -\alpha\,\dot{x}\,\vec{u}_x - k(\mathrm{x}(t) - \ell_0)\,\vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = \frac{k}{m}\ell_0}$$

On note : $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boxed{Q = \frac{\sqrt{mk}}{\alpha}}$. Alors :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \omega_0^2\,\ell_0}$$

On obtient l'ED d'un oscillateur amorti.

Rappel :

La solution est de la forme : $x(t) = \ell_0 + x_{SEH}(t)$

Avec $x_{SEH}(t)$ qui dépend de la valeur du facteur de qualité.

- Si $Q > 1/2$: $x_{SEH}(t) = e^{-\lambda t}\cdot(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$
- Si $Q < 1/2$: $x_{SEH}(t) = e^{-\lambda t}\cdot(A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t))$
- Si $Q = 1/2$: $x_{SEH}(t) = e^{-\omega_0 t}\cdot(At + B)$

Pour retrouver l'expression de λ et Ω, écrire le polynôme caractéristique et le résoudre. Exemple dans le cas où $Q > 1/2$:

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{|\Delta|}\right) = \boxed{-\lambda \pm j\Omega}$$

On en déduit :

$$\boxed{\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Omega = \omega_0 \sqrt{\left|\frac{1}{4Q^2} - 1\right|}}$$

III.2 - Bilan énergétique

PFD projeté sur l'axe (Ox) : $m\ddot{x} = -k(x(t) - \ell_0) - \alpha\dot{x}$

Bilan de puissance : $m\ddot{x}\dot{x} = -k\dot{x}(x(t) - \ell_0) - \alpha\dot{x}^2$

Ainsi :

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{\frac{1}{2}k(\ell(t) - \ell_0)^2}_{\mathcal{E}_p}\right) = \underbrace{-\alpha\dot{x}^2}_{\mathcal{P}_{frott}}$$

<u>Conclusion</u> :

La dérivée de l'énergie mécanique est négative. Donc l'énergie mécanique décroit avec le temps.

<u>Remarque</u> :

On retrouve par analogie : $\mathcal{E}_{frott} = -\alpha\dot{x}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{E}_{Joule} = Ri^2$

Le signe moins vient du choix de convention générateur / récepteur.

III.3 - Régime sinusoïdal forcé

On suppose le système est soumis à une force motrice extérieure : $\vec{F}_{mo} = F_m \cos(\omega t)\ \vec{u}_x$

On place l'origine du repère au niveau de la position d'équilibre.

Le PFD donne :

$$m\,\vec{a} = \vec{F}_{el} + \vec{f} + \vec{F}_{mo} \quad \Rightarrow \quad m\,\ddot{x}\,\vec{u}_x = -\alpha\,\dot{x}\,\vec{u}_x - k\,x(t)\,\vec{u}_x + F_m\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\ \dot{x} + \omega_0^2\,x = F_m\cos(\omega t)}$$

On peut alors passer en RSF. On pose :

$$\underline{F_{mo}} = F_m\,e^{i\omega t} \qquad \underline{x}(t) = \underline{X_m}\,e^{i\omega t} \qquad \underline{\mathrm{v}}(t) = \underline{V_m}\,e^{i\omega t}$$

Le PFD en RESF devient :

$$\left(i\omega + \frac{\omega_0}{Q} + \frac{\omega_0^2}{i\omega}\right)\underline{V_m}\,e^{i\omega t} = F_m\,e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{V_m} = \frac{F_m Q/\omega_0}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{V_{max}}{1 + iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

Le système masse ressort présente une résonance en vitesse pour $\omega = \omega_0$ (tout comme le RLC présente une résonance en intensité).