

Le chapitre précédent a concerné la cinématique du point matériel, c'est-à-dire la description du mouvement d'un point (position, vitesse et accélération) et ce, dans différents systèmes de coordonnées.

Ce chapitre, la dynamique du point matériel, va s'intéresser aux causes ou actions qui engendrent le mouvement. Ces actions, modélisées par des « forces », sont appliquées au point matériel. La dynamique du point matériel dans le cadre de la mécanique classique, est basée sur les lois de Newton qui permettent de relier les forces et les éléments de cinématique (vitesse et accélération).

I - Quantité de mouvement

I.1 - Cas d'un point matériel

Définition :

Soit un point matériel M de masse m et de vitesse \vec{v} . On appelle **quantité de mouvement** de M :

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

Remarque :

Pour un système non ponctuel, on montrera plus tard (M8) que : $\vec{p}_{\text{sys}} = m_{\text{tot}} \vec{v}_G$ où G est le centre de masse du système.

I.2 - Principe d'inertie

Définitions :

Un système est dit **isolé** si aucune action extérieure ne s'exerce sur lui. Un système est dit **pseudo-isolé** si l'ensemble des actions extérieures se compensent parfaitement.

En cinématique, nous avons vu qu'il n'existait aucun référentiel privilégié pour décrire une trajectoire. En dynamique en revanche, il existe des référentiels privilégiés appelés **référentiels galiléens** ou **inertiels**, dont le principe d'inertie postule l'existence.

Principe d'inertie ou première loi de Newton

Il existe des référentiels particuliers, appelés **référentiels galiléens** ou **référentiels inertiels**, par rapport auxquels un point matériel isolé ou pseudo-isolé est en mouvement rectiligne uniforme (ou immobile).

Corolaire :

Un référentiel est dit galiléen si un système isolé ou pseudo-isolé est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à ce référentiel.

Conséquence :

Un référentiel est galiléen s'il est en **translation rectiligne uniforme** par rapport à un autre référentiel galiléen.

ATTENTION ! Le principe d'inertie **postule l'existence** des référentiels galiléens. En revanche, il ne dit pas comment les trouver. En pratique on ne connaît aucun référentiel galiléen ! On suppose seulement qu'ils le sont durant la durée de l'expérience τ .

Exemples :

- Référentiel terrestre \mathcal{R}_T , galiléen si $\tau \ll 24$ h (rotation de la Terre sur elle-même) ;
- Référentiel géocentrique \mathcal{R}_G , galiléen si $\tau \ll 365$ j (rotation de la Terre autour du soleil) ;
- Référentiel héliocentrique \mathcal{R}_H , galiléen si $\tau \ll 220 \cdot 10^6$ a (rotation du soleil autour du centre galactique).

II - Forces

II.1 - Interactions fondamentales

Il existe 4 **interactions fondamentales** :

- **interaction gravitationnelle** (interaction entre des objets massifs, portée ∞) ;
- **interaction électrostatique** (interaction entre des objets chargés, portée ∞) ;
- interaction nucléaire faible (interaction responsable de la radioactivité, portée $\sim 10^{-15}$ m) ;
- interaction nucléaire forte (interaction responsable de la cohésion du noyau, portée $\sim 10^{-18}$ m) ;

*Mathématiquement, une action se modélise par un vecteur, que l'on appelle une **force**.*

La force exercée par un point matériel 1 sur un point matériel 2 se note : $\vec{F}_{1/2}$

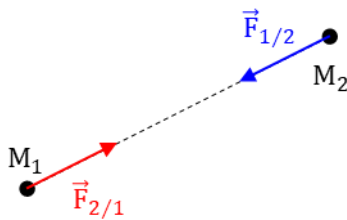
Unité et dimension (SI) : $[F] = M L T^{-2}$ et $1 N = 1 kg \cdot m \cdot s^{-2}$

II.2 - Principe des actions réciproques

Principe des actions réciproque ou troisième loi de Newton

Si un corps 1 exerce une force sur un corps 2, alors 2 exerce sur 1 une force de même

norme, de même direction et de direction opposée : $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$



II.3 - Principe fondamental de la dynamique

a) Cas du point matériel

Principe fondamental de la dynamique (PFD) ou deuxième loi de Newton

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un point matériel est égale à la résultante des forces s'appliquant sur ce point.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}$$

Remarque :

Si la masse est constante, on retrouve la forme vue au lycée : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d m \vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{m \vec{a} = \sum \vec{F}}$

b) Cas d'un système quelconque

On considère deux points matériels M_1 et M_2 . Chaque point est soumis à l'action de l'autre et les deux points sont soumis à des forces extérieures.

On applique le PFD sur $\{M_1\}$ et sur $\{M_2\}$ dans un référentiel galiléen.

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{2/1} + \sum \vec{F}_{\text{ext}/1} \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{1/2} + \sum \vec{F}_{\text{ext}/2}$$

On en déduit :

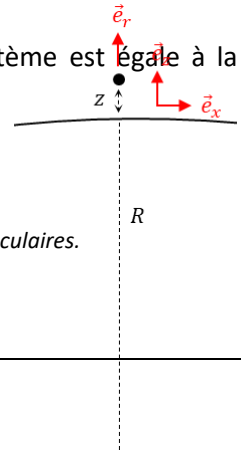
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{1/2} + \sum \vec{F}_{\text{ext}/1} + \sum \vec{F}_{\text{ext}/2} \\ \frac{d\vec{p}_{\{1+2\}}}{dt} &= \sum \vec{F}_{\text{ext}/1} + \sum \vec{F}_{\text{ext}/2} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \end{aligned}$$

PFD système non ponctuel

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un système est égale à la résultante des forces extérieures s'appliquant sur ce système.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

Lorsqu'on étudie un système non ponctuel, on ne tient pas compte des forces internes comme les interactions intermoléculaires.



III - Applications

III.1 - Force de gravitation

a) Expression générale

Soit deux systèmes de centre de masse M_1 (m_1) et M_2 (m_2). On place M_1 sur l'origine d'un système de coordonnées sphériques.

Donc : $M_1 = (0, 0, 0)$ et $M_2 = (r, \theta, \varphi)$.

La force de gravitation exercée par M_1 sur M_2 est :

$$\vec{F}_{1/2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$$

Avec G la **constante universelle de gravitation** : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

Remarque :

- C'est une force toujours attractive (signe \ominus).
- On a bien $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$

b) Poids

On considère maintenant que :

- M_1 est une planète de rayon R et de masse M .
- M_2 est un objet de masse m situé proche de la surface de cette planète, à une altitude $z \ll R$.

Conséquences :

- Le vecteur \vec{e}_r correspond à un vecteur unitaire « vers le haut », noté \vec{u}_z .
- La distance $M_1 M_2 = R + z \simeq R$

Ainsi, la planète exerce une force :

$$\vec{F}_{1/2} = -G \frac{mM}{(R+z)^2} \vec{u}_z \simeq m \cdot \underbrace{\left[-G \frac{M}{R^2} \vec{u}_z \right]}_{\vec{g}}$$

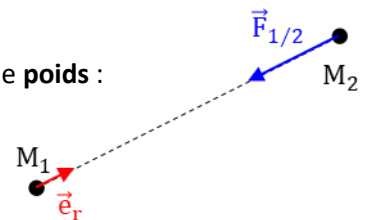
Le vecteur \vec{g} s'appelle l'**accélération de pesanteur** de la planète. Cette force s'appelle le **poids** :

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

AN : pour la Terre :

$$M_T = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg} \Rightarrow \boxed{g_T = 9,81 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}}$$

 $R_T = 6\,371 \text{ km}$



c) Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme

Champ de pesanteur uniforme $\Leftrightarrow \vec{g}$ est constant (en norme et en direction).

Approximation valable si l'altitude du système ne varie pas trop, et si la position sur la surface de la Terre ne varie pas trop.

Soit un point matériel M (masse m) soumis uniquement à l'accélérateur de pesanteur terrestre (supposée uniforme).

Bilan des forces :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$$

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le PFD donne :

$$\boxed{m\vec{a} = -mg\vec{u}_z}$$

Il s'agit d'un mouvement à vecteur accélération constant. Le mouvement sera donc parabolique (voir chapitre M1).

CI : sur l'origine avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0(\cos(\alpha)\vec{u}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_z)$

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha) t \end{cases}$$

Trajectoire :

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x}$$

III.2 - Force de frottement fluide

a) Cas des faibles vitesses : résolution exacte

On reprend l'exemple précédent. On suppose que l'air exerce une force de frottement fluide :

$$\boxed{\vec{f} = -\alpha \vec{v}}$$

Le PFD donne :

$$m\vec{a} = -\alpha \vec{v} + m\vec{g} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g} \quad \text{avec : } \tau = \frac{m}{\alpha}$$

Cherchons la solution de l'ED avec pour CI : $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix}$.

Remarque : La méthode de résolution d'une ED vectorielle est la même que pour une ED avec des fonction.

Solution :

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\vec{A} e^{-t/\tau}}_{SEH} + \underbrace{\tau\vec{g}}_{SP}$$

CI :

$$\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = \vec{A} + \tau\vec{g} \Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = (\vec{v}_0 - \tau\vec{g}) e^{-t/\tau} + \tau\vec{g}}$$

b) Cas des fortes vitesses

On suppose que l'air exerce une force de frottement fluide du type (approximation des fortes vitesses) :

$$\boxed{\vec{f} = -\beta v \vec{v}}$$

Le PFD donne :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\beta v \vec{v} + m\vec{g} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv_x}{dt} + \frac{\beta}{m} v v_x = 0 \\ \frac{dv_y}{dt} + \frac{\beta}{m} v v_y = 0 \\ \frac{dv_z}{dt} + \frac{\beta}{m} v v_z = -g \end{cases} \quad \text{avec : } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Impossible de résoudre ces trois ED.

Déterminons la vitesse en régime permanent et le temps caractéristique du régime transitoire.

Vitesse en régime permanent

$$\vec{0} = -\beta v_\infty \vec{v}_\infty + m\vec{g} \Rightarrow \beta v_\infty \vec{v}_\infty = m\vec{g} \xrightarrow{\text{norme}} \beta v_\infty v_\infty = mg \Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} \Rightarrow \vec{v}_\infty = -\sqrt{\frac{mg}{\beta}} \vec{u}_z$$

$$\xrightarrow{\text{direction}} \vec{v}_\infty \propto +\vec{g} \Rightarrow \vec{v}_\infty \propto -\vec{u}_z$$

Temps caractéristique du régime transitoire

Identifions une grandeur homogène à un temps dans l'ED.

Méthode générale : faire apparaître uniquement des grandeurs adimensionnées.

Exemple avec l'ED des faibles vitesses :

On a : $m \frac{d\vec{v}}{dt} + \alpha \vec{v} = m\vec{g}$

En régime permanent : $v_\infty = \frac{mg}{\alpha}$ et $\vec{v}_\infty = -v_\infty \vec{u}_z$

Ainsi :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \alpha \vec{v} = -\alpha v_\infty \vec{u}_z \Rightarrow \frac{m}{\alpha} \frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v_\infty}\right)}{dt} + \left(\frac{\vec{v}}{v_\infty}\right) = -\vec{u}_z \Rightarrow \frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v_\infty}\right)}{d\left(\frac{t}{m/\alpha}\right)} + \left(\frac{\vec{v}}{v_\infty}\right) = -\vec{u}_z$$

On pose donc : $\tau = \frac{m}{\alpha}$

On obtient alors une ED adimensionnée :

$$\frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v_\infty}\right)}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)} + \left(\frac{\vec{v}}{v_\infty}\right) = -\vec{u}_z$$

Application avec l'ED des fortes vitesses :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} + \beta v \vec{v} = m\vec{g} = -\beta v_\infty^2 \vec{u}_z \Rightarrow \frac{m}{\beta v_\infty} \frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v_\infty}\right)}{dt} + \left(\frac{v}{v_\infty}\right) \left(\frac{\vec{v}}{v_\infty}\right) = -\vec{u}_z \Rightarrow \frac{d\left(\frac{\vec{v}}{v_\infty}\right)}{d\left(\frac{t}{\tau}\right)} + \left(\frac{v}{v_\infty}\right) \left(\frac{\vec{v}}{v_\infty}\right) = -\vec{u}_z$$

On pose donc : $\tau = \frac{m}{\beta v_\infty} = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}$

III.3 - Tension d'un fil

On considère un pendule simple, c'est-à-dire une masse ponctuelle M (m) attachée à l'extrémité d'un fil de longueur L et de masse nulle.

On se place dans un référentiel en coordonnées polaires.

Calcul de l'accélération en polaire :

$$\vec{OM} = L \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = L\dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = -L\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + L\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Bilan des forces :

○ Le poids \vec{P} :

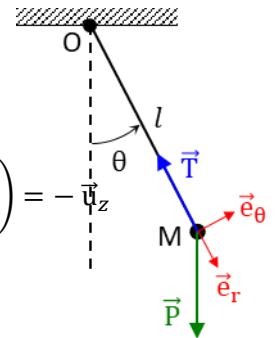
$$\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta)$$

○ La tension du fil \vec{T} :

$$\vec{T} = -T \vec{e}_r$$

On applique le PFD dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = mg\cos(\theta) - T & (1) \\ mR\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) & (2) \end{cases}$$



Remarque : Ici, référentiel = observateur muni du repère cartésien mais base de projection = repère polaire.

L'équation (2) est l'équation différentielle du mouvement, elle permet de trouver $\theta(t)$.

L'équation (1) permet de déterminer la tension du fil T, connaissant θ .

On en déduit donc :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

C'est une **ED non linéaire d'ordre 2**. On ne peut pas la résoudre.

Hypothèse des petits angles : $\theta \ll 1$ rad

Ainsi,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0$$

On reconnaît ici l'ED d'un oscillateur harmonique. La solution vaut :

$$\theta(t) = \theta_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

III.4 - Poussée d'Archimède

Soit un solide immergé dans un fluide.

On appelle poussée d'Archimède la résultante des forces de pression exercées par le fluide sur le système. C'est une force qui s'applique au centre de masse du système, **égale à l'opposé du poids du fluide déplacé**.

$$\vec{\pi} = -\vec{P}_{\text{fluide déplacé}} = -m_{\text{fluide déplacé}} \vec{g} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{solide}} \vec{g}$$

Où ρ_{fluide} est la masse volumique du fluide et V_{solide} le volume du système.

Application : Déterminer la proportion du volume d'un iceberg (à l'équilibre) se trouvant sous l'eau.

Données : $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$ $\rho_{\text{glace}} = 0,91 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$

Bilan des forces :

- \vec{P} le poids de l'iceberg.

$$\vec{P} = m\vec{g} = -\rho_{\text{glace}} V_{\text{tot}} g \vec{e}_z$$

- $\vec{\pi}$ la poussée d'Archimède de la partie immergée de l'iceberg.

$$\vec{\pi} = \rho_{\text{eau}} V_{\text{im}} g \vec{e}_z$$

On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On applique le PFD à l'équilibre :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{\pi} \Rightarrow 0 = -\rho_{\text{glace}} V_{\text{tot}} g + \rho_{\text{eau}} V_{\text{im}} g \Rightarrow \frac{V_{\text{im}}}{V_{\text{tot}}} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{0,91}{1,00} = 91 \%$$