

La mécanique est la branche de la physique qui s'intéresse à l'étude des mouvements. On distingue 3 types de mécanique.

- Newton énonce en 1687 ses trois lois fondamentales de la mécanique et pose les fondements théoriques de ce que l'on nomme actuellement la **mécanique classique** ou **mécanique newtonienne**.
- Einstein postule en 1905 que la vitesse de la lumière est une constante quelque soit le référentiel d'étude, donnant ainsi naissance à la **mécanique relativiste**. Une des conséquences est que le temps n'est plus absolu mais dépend du référentiel.
- Dans les années 1920, Heisenberg, Schrödinger, Dirac, ... montrent qu'il est impossible de connaître avec une précision infinie la position et la trajectoire d'une particule, donnant ainsi naissance à la **mécanique quantique**.

Le but de ce chapitre est de s'intéresser à la **cinématique**, c'est-à-dire à la description du mouvement d'un corps sans s'intéresser aux causes de ce mouvement (cf. chapitre suivant).

I - Repérer un point dans l'espace-temps

I.1 - Espace et temps classiques

Le **mouvement est relatif**. Par exemple, assis sur votre chaise, vous êtes :

- immobile par rapport au sol / à la surface de la Terre ;
- en mouvement par rapport au centre de la Terre puisqu'elle tourne sur elle-même.

En mécanique classique (Newton), **l'espace et le temps sont absolus** : un intervalle de temps Δt et une distance Δx entre deux points sont les mêmes pour tout observateur.

En mécanique relativiste (Einstein) :

- le temps s'écoule plus doucement près d'objets massifs (étoiles, trous noirs) ;
- un objet se déplaçant à grande vitesse par rapport à un observateur sera vu contracté dans le sens du mouvement.

I.2 - Référentiels

Définition : Un référentiel est **un observateur** muni d'un repère d'espace et d'une horloge.

Exemples :

- **Référentiel terrestre** : un observateur est immobile sur la surface de la Terre.
- **Référentiel géocentrique** : observateur placé au centre de la Terre, et les axes de son repère point vers 3 étoiles fixes. L'observateur ne tourne donc pas avec la Terre.

Remarque : le temps étant absolu, toutes les horloges des différents référentiels sont identiques.

⚠⚠⚠ **Très important**

Le repère de l'observateur n'est pas nécessairement le repère dans lequel on va projeter les vecteurs (position, vitesse, accélération et forces).

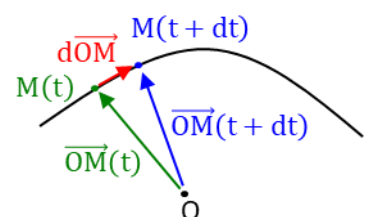
II - Description du mouvement

II.1 - Position, vitesse et accélération

Soit un référentiel \mathcal{R} de centre O.

- La position d'un point M est repéré par le **vecteur position** \overrightarrow{OM} .
- La **trajectoire** est l'ensemble des points occupés par M au cours du temps.
- On note $d\overrightarrow{OM}$ le **déplacement élémentaire** entre deux instants t et $t + dt$ infiniment proches :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + dt) - \overrightarrow{OM}(t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + dt)}$$



- Le **vecteur vitesse** est défini par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

\vec{v} est toujours tangent à une trajectoire.

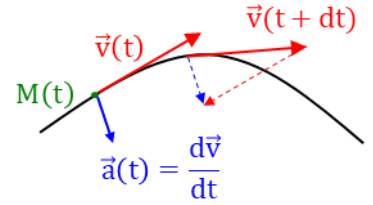
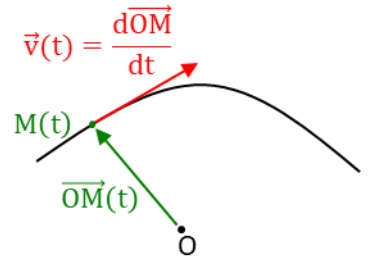
On note $d\vec{v}$ la variation du vecteur vitesse entre deux instants t et $t + dt$ infiniment proches :

$$d\vec{v} = \vec{v}(t + dt) - \vec{v}(t)$$

- Le **vecteur accélération** est défini par :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Le vecteur accélération est toujours dirigé vers « l'intérieur » de la trajectoire.



II.2 - Base orthonormée directe

Tous les repères utilisés en physique sont des **bases orthonormées directes**. Cela signifie que les vecteurs de base sont :

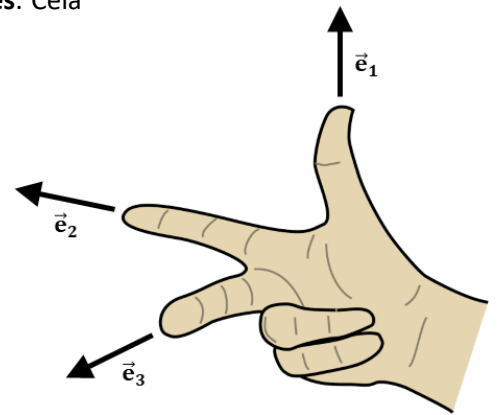
- unitaires : $\|\vec{e}_i\| = 1$;
- orthogonaux deux à deux : $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ si $i \neq j$;
- orienté dans le sens de la main droite.

Dans une BOND : $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, un vecteur quelconque s'écrit :

$$\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

La norme de ce vecteur vaut :

$$V = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$$



II.3 - Base cartésienne

C'est le repère « classique ».

- Vecteur position**

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Déplacement élémentaire (géométriquement)**

Durant le temps dt , le point M peut se déplacer de dx selon l'axe x , dy selon l'axe y et dz selon l'axe z .

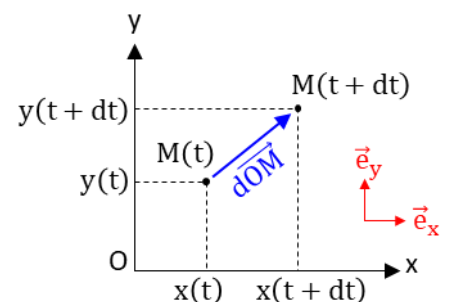
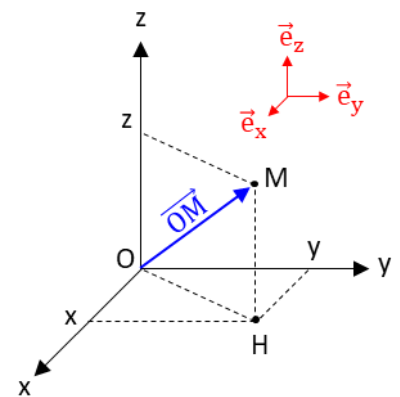
$$M(x, y, z) \rightarrow M(x + dx, y + dy, z + dz)$$

Ainsi :

$$d\vec{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

- Déplacement élémentaire (par le calcul)**

$$\begin{aligned} d\vec{OM} &= d(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z) \\ &= d(x\vec{e}_x) + d(y\vec{e}_y) + d(z\vec{e}_z) \quad \vec{e}_x, \vec{e}_y, \text{ et } \vec{e}_z \text{ sont des vecteurs constants} \\ &= dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \end{aligned}$$



○ **Vitesse**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_x + \frac{dy}{dt} \vec{e}_y + \frac{dz}{dt} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

○ **Accélération**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z) = \frac{d}{dt}(\dot{x} \vec{e}_x) + \frac{d}{dt}(\dot{y} \vec{e}_y) + \frac{d}{dt}(\dot{z} \vec{e}_z) = \frac{d\dot{x}}{dt} \vec{e}_x + \frac{d\dot{y}}{dt} \vec{e}_y + \frac{d\dot{z}}{dt} \vec{e}_z$$

Ainsi :

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} d^2x/dt^2 \\ d^2y/dt^2 \\ d^2z/dt^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

II.4 - Base polaire

Soit le repère cartésien 2D (O,x,y).

On appelle r la distance OM et $\theta \in [0, 2\pi[$ l'angle orienté entre (Ox) et \vec{OM} .

On introduit deux nouveaux vecteurs unitaires :

○ le **vecteur radial** \vec{e}_r :

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

○ le **vecteur orthoradial** \vec{e}_θ , orthogonal à \vec{e}_r dans le sens des θ croissants.

Ainsi, $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ forme une BOND.

Le repère polaire est le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

Lien entre le repère cartésien et le repère polaire :

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_y = \sin(\theta) \vec{e}_r + \cos(\theta) \vec{e}_\theta \end{cases}$$

Par définition :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

○ **Déplacement élémentaire (géométriquement)**

Durant le temps dt , le point M peut se déplacer radialement de dr et tourner d'un angle $d\theta$.

Soit :

$$M(r, \theta) \rightarrow M(r + dr, \theta + d\theta)$$

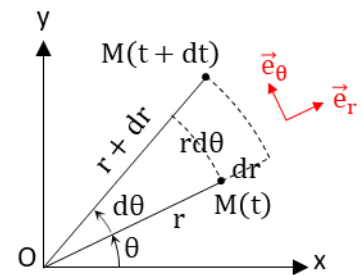
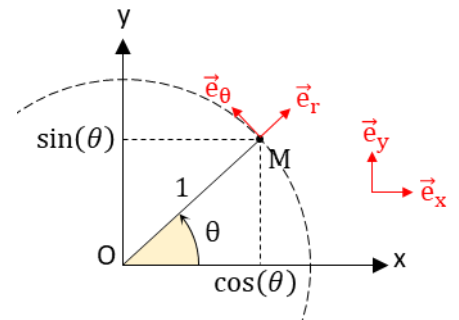
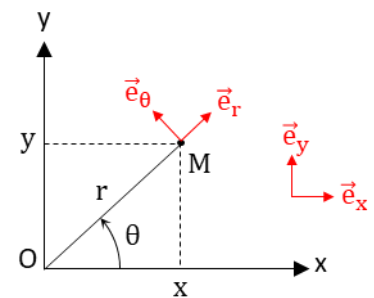
On constate que M se déplace de dr dans la direction \vec{e}_r et de $r d\theta$ dans la direction \vec{e}_θ . Ainsi :

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

○ **Déplacement élémentaire (par le calcul)**

$$d\vec{OM} = d(r \vec{e}_r) = dr \vec{e}_r + r \frac{d(\vec{e}_r)}{dt} dt$$

On a :



$$\begin{aligned}
 d(\vec{e}_r) &= d(\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) \\
 &= d\theta \cdot \frac{d}{d\theta} (\cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y) \\
 &= -d\theta \sin(\theta) \vec{e}_x + d\theta \cos(\theta) \vec{e}_y \\
 &= d\theta \vec{e}_\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d(\vec{e}_\theta) &= d(-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y) \\
 &= d\theta \cdot \frac{d}{d\theta} (-\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y) \\
 &= -d\theta \cos(\theta) \vec{e}_x - d\theta \sin(\theta) \vec{e}_y \\
 &= -d\theta \vec{e}_r
 \end{aligned}$$

De même (à connaître par cœur) :

$$\boxed{d\vec{e}_r = d\theta \vec{e}_\theta}$$

$$\boxed{d\vec{e}_\theta = -d\theta \vec{e}_r}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r}$$

On retrouve bien :

$$\boxed{d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix}}$$

○ **Vitesse**

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}}$$

Vocabulaire :

- $\dot{\theta} = \omega$: la **vitesse angulaire** ($rad \cdot s^{-1}$)
- $v_r = \dot{r}$: **vitesse radiale** ;
- $v_\theta = r\dot{\theta}$: **vitesse orthoradiale**.
- **Accélération**

$$\begin{aligned}
 \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\
 &= \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{e}_r) + \frac{d}{dt} (r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\
 &= (\ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta} \vec{e}_\theta) + (\dot{r}\dot{\theta} \vec{e}_\theta + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r)
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix}}$$

II.5 - Base cylindrique

Il s'agit de l'association du repère polaire avec l'axe (Oz) du repère cartésien.

On a : $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ qui forme une BOND.

○ **Vecteur position**

$$\boxed{\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z}$$

ATTENTION ! r n'est plus égale à la distance OM .

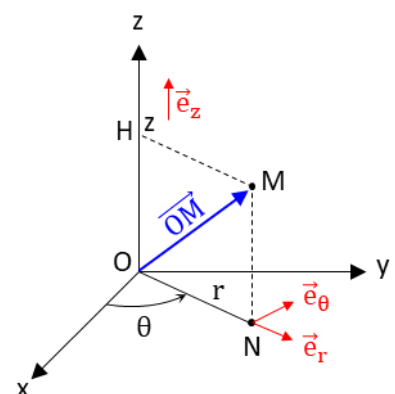
$$OM = \sqrt{r^2 + z^2}$$

○ **Déplacement élémentaire**

$$M(r, \theta, z) \rightarrow M(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$$

On a donc :

$$\boxed{d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix}}$$



○ **Vitesse**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{pmatrix}$$

○ **Accélération**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{pmatrix}$$

II.6 - Base sphérique

Soit le repère cartésien (O, x, y, z) et un point M . On définit :

- la distance $r = OM$
- $\theta \in [0, \pi]$ l'angle orienté entre (Oz) et \vec{OM}
- $\varphi \in [0, 2\pi[$ l'angle orienté entre (Ox) et \vec{ON} .

○ **Vecteur position**

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r$$

○ **Vecteur déplacement élémentaire**

On a :

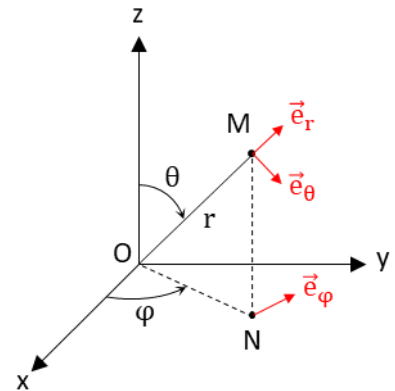
$$M(r, \theta, \varphi) \rightarrow M(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$$

Dans ce cas :

- Selon \vec{e}_r : M se déplace de dr .
- Selon \vec{e}_θ : M se déplace le long d'un cercle de rayon r , son déplacement élémentaire vaut donc $r d\theta$.
- Selon \vec{e}_φ : M se déplace le long d'un cercle de rayon $r \sin(\theta)$, son déplacement élémentaire vaut donc $r \sin(\theta) d\varphi$.

On en déduit :

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin(\theta) d\varphi \end{pmatrix}$$



III - Études de mouvements particuliers

III.1 - Mouvement uniformément accéléré

On se place en coordonnées cartésiennes.

Soit un point M subissant une accélération constante :

$$\vec{a} = a_0 \vec{e}_z$$

On suppose qu'à $t = 0$, on a :

$$\vec{OM}(t = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos(\alpha) \\ 0 \\ v_0 \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

○ **Équation paramétrique ou horaire :**

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = a_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = a_0 t + v_0 \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) t \\ y = 0 \\ z = \frac{1}{2} a_0 t^2 + v_0 \sin(\alpha) t \end{cases}$$

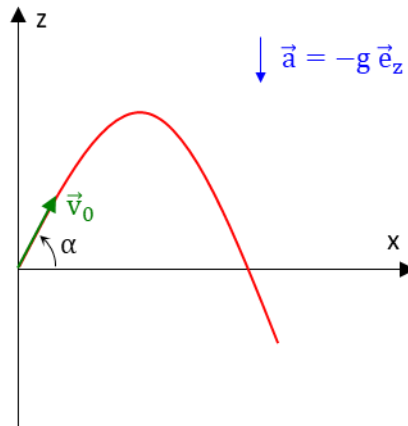
○ **Nature de la trajectoire :**

$$z = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

C'est une parabole.

Le signe de a_0 renseigne sur l'orientation de la concavité de la parabole.

Exemple : cas où $a_0 < 0$.



III.2 - Mouvement circulaire

a) Cas uniforme

On suppose un mouvement **circulaire** (ie. rayon constant) **uniforme** (norme de \vec{v} constante). On se place en coordonnées polaires.

Remarque : dans cet exemple, le référentiel est lié au repère (O, x, y) mais le repère de projection des forces est le repère (O, r, θ) .

On a :

$$\overline{OM} = R \vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = R\omega \vec{e}_\theta$$

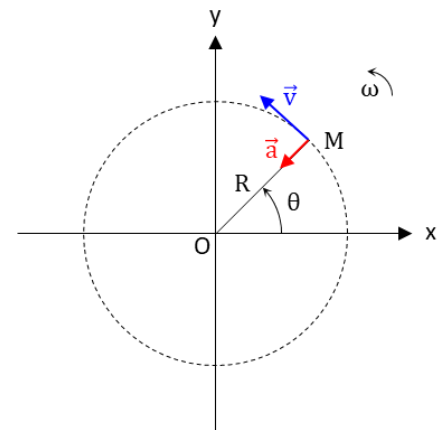
On a donc :

$$v = R\omega = \text{cte}$$

Accélération :

$$\vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_r = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

L'accélération est purement radiale, dirigée vers le centre du cercle.



b) Cas non uniforme

Cette fois, le mouvement est non uniforme.

On a :

$$\overline{OM} = R \vec{e}_r \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = R\omega \vec{e}_\theta = v \vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -R\omega^2 \vec{e}_r + R\dot{\omega} \vec{e}_\theta$$

On a donc :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r + \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$$

L'accélération possède deux composantes :

- une composante perpendiculaire au mouvement \vec{a}_\perp :

$$\vec{a}_\perp = - \frac{v^2}{R} \vec{e}_r$$

Orthogonal à la trajectoire
 La norme dépend de v et du rayon
 Dirigé vers le centre du cercle

○ une composante parallèle au mouvement \vec{a}_\parallel :

$$\vec{a}_\parallel = \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta$$

Tangent à la trajectoire
 Signe + si mouvement accéléré
 Signe - si mouvement décéléré

+ faire schéma

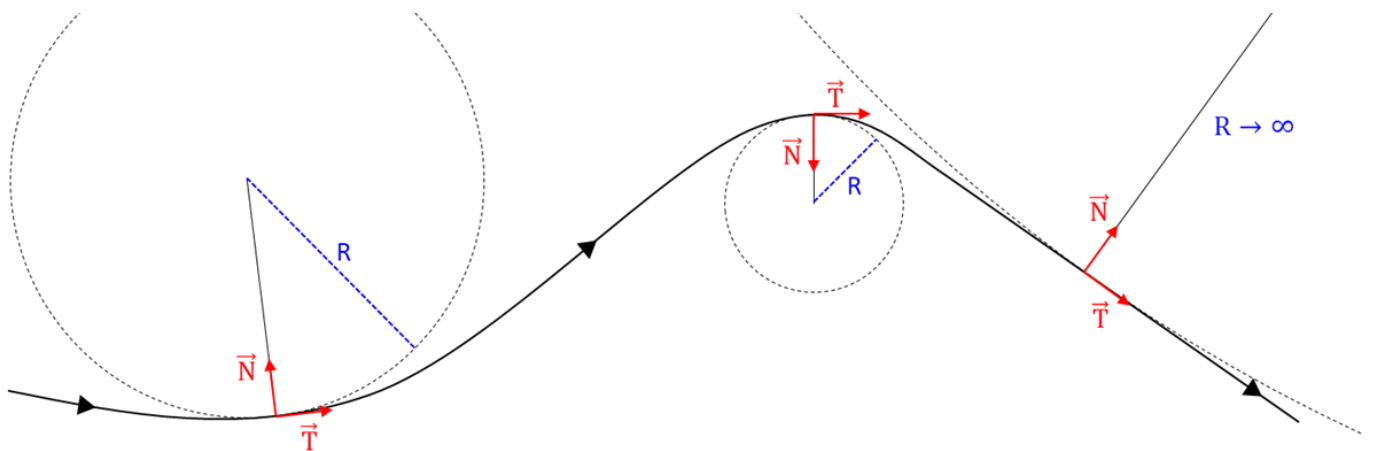
IV - Repère de Frenet

IV.1 - Expression de la vitesse et de l'accélération

Soit un point M parcourant une trajectoire plane quelconque dans un référentiel \mathcal{R} .

On définit le **repère de Frenet** (M, \vec{T}, \vec{N}) où :

- Origine sur le point $M(t)$;
- \vec{T} vecteur unitaire tangent à la trajectoire (dans le sens du mouvement) ;
- \vec{N} vecteur unitaire \perp à \vec{T} et dirigé dans le sens de la concavité (ie. vers « l'intérieur » de la courbe).



Par construction, on a :

$$\boxed{\vec{v} = v \vec{T}}$$

L'accélération vaut :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v \frac{d\vec{T}}{dt}$$

Calculons $\frac{d\vec{T}}{dt}$.

(1) Direction et sens : montrons que $\frac{d\vec{T}}{dt} \perp \vec{T}$

$$\|\vec{T}\|^2 = 1 = \vec{T} \cdot \vec{T} \Rightarrow \frac{d\|\vec{T}\|^2}{dt} = 0 = \frac{d}{dt}(\vec{T} \cdot \vec{T}) = \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{d\vec{T}}{dt} \cdot \vec{T} = 2 \vec{T} \cdot \frac{d\vec{T}}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{T}}{dt} \perp \vec{T}} \Rightarrow \frac{d\vec{T}}{dt} \propto \pm \vec{N}$$

Le vecteur accélération est toujours dirigé vers l'intérieur de la courbe. Donc :

$$\frac{d\vec{T}}{dt} \propto + \vec{N}$$

(2) Norme

On admet que pour toute courbe il existe un unique cercle qui épouse « au mieux » une courbe en un point M (**cercle osculateur**).

Ainsi, par analogie avec le mouvement circulaire non uniforme, on en déduit :

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{v}{R} \vec{N}$$

Conclusion :

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N}$$

IV.2 - Lien entre nature du mouvement et accélération

- Un mouvement est dit **uniforme** si la norme du vecteur vitesse est constante.

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

Le mouvement est accéléré si $\frac{dv}{dt} > 0$: \vec{a} possède une composante selon $+\vec{T}$.

Le mouvement est décéléré si $\frac{dv}{dt} < 0$: \vec{a} possède une composante selon $-\vec{T}$.

- Un mouvement est dit **rectiligne** si la direction du vecteur vitesse est constante.

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow C = \frac{1}{R} = 0$$

On appelle **courbure** de la trajectoire au point M l'inverse du rayon du cercle osculateur.

$$C = \frac{1}{R}$$

Plus la courbure est grande, plus la composante normale de l'accélération est grande, et donc plus la trajectoire est courbée.

Inversement, pour une trajectoire uniforme, la courbure tend vers 0 : la composante normale est nulle.

V - Complément mathématique

V.1 - Projection de vecteurs

Faire l'exercice 2 du TD pour illustrer.

- Première méthode : projection
- Deuxième méthode : cas particuliers.

V.2 - Courbes à connaître

a) Le cercle

Un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + R \cos(\omega t) \\ y(t) = y_0 + R \sin(\omega t) \end{cases}$$

Et pour équation cartésienne :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

b) L'ellipse

Une ellipse dont le centre est (0,0) a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = b \cos(\omega t - \phi) \end{cases}$$

Cas particuliers :

$$\phi = 0$$

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = b \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

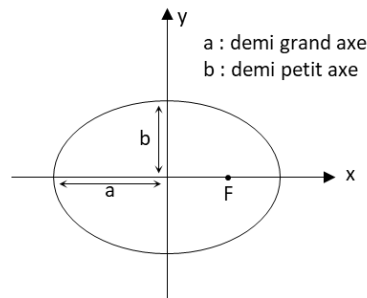
$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = b \sin(\omega t) \end{cases}$$

$$\phi = \pi$$

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(\omega t) \\ y(t) = -b \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{b}{a}x$$

Droite de pente positive.



Droite de pente négative.

Application en électricité : méthode de Lissajous

On observe à l'oscilloscope deux signaux de même fréquence. Traçons $s_2(t)$ en fonction de $s_1(t)$ sur le **mode XY** de l'oscilloscope.

S'ils sont en phase ou en opposition de phase → droite.

Sinon → ellipse

A retenir : cette méthode permet de déterminer très précisément si des signaux sont en phase ou en opposition de phase.

V.3 - Calcul intégral

Objectif : calculer des longueurs, surfaces et volumes à l'aide d'un calcul intégral.

- Périmètre du cercle

$$L = \int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R$$

Surface élémentaire dS égale au produit des deux déplacements élémentaires qui génèrent cette surface.

- Surface d'un rectangle :

$$S = \iint dS = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b dx \cdot dy = \int_{x=0}^a dx \int_{y=0}^b dy = ab$$

- Surface d'un disque :

$$S = \iint dS = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} dr \cdot r d\theta = \int_{r=0}^R r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \pi R^2$$

- Surface du contour d'un cylindre :

$$S = \iint dS = \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} dz \cdot R d\theta = R \int_{z=0}^h dz \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi Rh$$

- Surface d'une sphère :

$$S = \iint dS = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} R d\theta \cdot R \sin(\theta) d\varphi = R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 4\pi R^2$$

Volume élémentaire dV égale au produit des trois déplacements élémentaires qui génèrent ce volume.

- Volume d'un cylindre :

$$V = \iiint dV = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^h dr \cdot r d\theta \cdot dz = \int_{r=0}^R r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^h dz = \pi R^2 h$$

- Volume d'une boule :

$$V = \iiint dV = \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} dr \cdot r d\theta \cdot r \sin(\theta) d\varphi = \int_{r=0}^R r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3$$