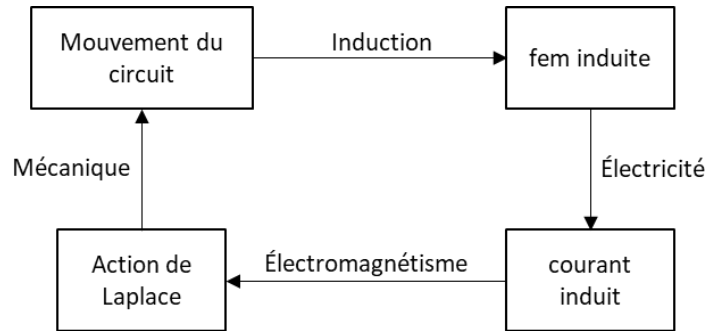




I5 · Circuit mobile dans un champ stationnaire

Les applications de l'induction de Lorentz sont nombreuses. Les principales sont les conversions réciproques d'énergie électrique en énergie mécanique : moteurs électriques, haut-parleur, etc.



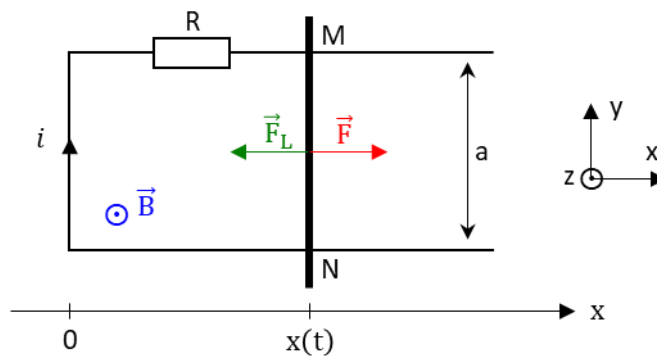
I - Rails de Laplace

I.1 - Dispositif

On reprend l'étude du rail de Laplace.

Hypothèses :

- \vec{B} est uniforme et stationnaire.
- On néglige l'induction propre $\Rightarrow \vec{B}_{tot} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_p \approx \vec{B}_{ext}$.
- On note R la résistance électrique de la barre. On néglige la résistance du reste du circuit.
- On suppose que la barre est soumise à une force $\vec{F}_{mo} = F_{mo} \vec{e}_x$ avec $F > 0$.



I.2 - Étude qualitative

La force \vec{F} met en mouvement la barre selon $+\vec{e}_x$

$\Rightarrow |\phi|$ augmente car B constant et S augmente

\Rightarrow apparition d'une fem induite

\Rightarrow apparition d'un courant induit $i > 0$

\rightarrow s'oppose à l'augmentation de $|\phi|$

\Rightarrow apparition d'une force de Laplace selon $-\vec{e}_x$

\rightarrow s'oppose à la force initiale

La loi de Lenz est bien vérifiée.

I.3 - Étude quantitative

- Calcul du flux (pas de champ induit, $\vec{B}_{tot} \simeq \vec{B}$) :

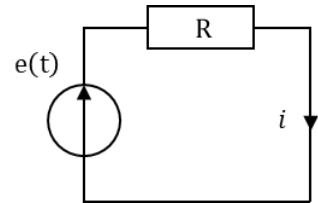
$$\phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S}(t) = B \vec{e}_z \cdot (-a x(t) \vec{e}_z) = \boxed{-aB x(t)}$$

- Loi de Faraday :

$$\boxed{e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = aB v(t)}$$

- Loi des mailles :

$$e(t) = \boxed{R i(t) = aB v(t)} \quad (EE)$$



- Équation mécanique :

Système = {tige MN}. Référentiel = terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

- Poids et réaction normale qui se compensent ;
- Force : $\vec{F} = F \vec{e}_x$;
- Force de Laplace : $\vec{F}_L = i \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B} = -i a B \vec{e}_x$.

On applique le PFD :

$$\boxed{m \frac{dv}{dt} = F - i(t) a B} \quad (EM)$$

- On découple les équations :

$$m \frac{dv}{dt} = F - \frac{a^2 B^2}{R} v(t) \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau}}$$

Avec :

$$\boxed{\tau = \frac{mR}{a^2 B^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_\infty = \frac{RF}{a^2 B^2}}$$

On en déduit la solution :

$$\boxed{v(t) = v_\infty (1 - e^{-t/\tau})} \Rightarrow i(t) = \frac{aB}{R} v(t)$$

I.4 - Bilan énergétique

Bilan de puissance : on multiplie (EE) par $i(t)$ et (EM) par $v(t)$.

$$\underbrace{aB v(t) i(t)}_{\mathcal{P}_{fem}} = \underbrace{R i^2(t)}_{\mathcal{P}_{Joule}} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} m v^2(t)}_{\mathcal{E}_{cin}} \right) = \underbrace{Fv(t)}_{\mathcal{P}_{motrice}} - \underbrace{i(t)v(t) aB}_{\mathcal{P}_{Laplace}}$$

On constate que :

$$\mathcal{P}_{fem} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$$

Remarque : Ce sera toujours le cas.

On somme les deux bilans :

$$\boxed{\mathcal{P}_{motrice} = \frac{d\mathcal{E}_{cin}}{dt} + \mathcal{P}_{Joule}}$$

La puissance fournie par la force motrice sert en partie à mettre en mouvement la tige et est en partie perdue par effet Joule. Une fois v_∞ atteint $\Rightarrow \mathcal{E}_{cin} = cte$, toute la puissance motrice est dissipée par effet Joule.

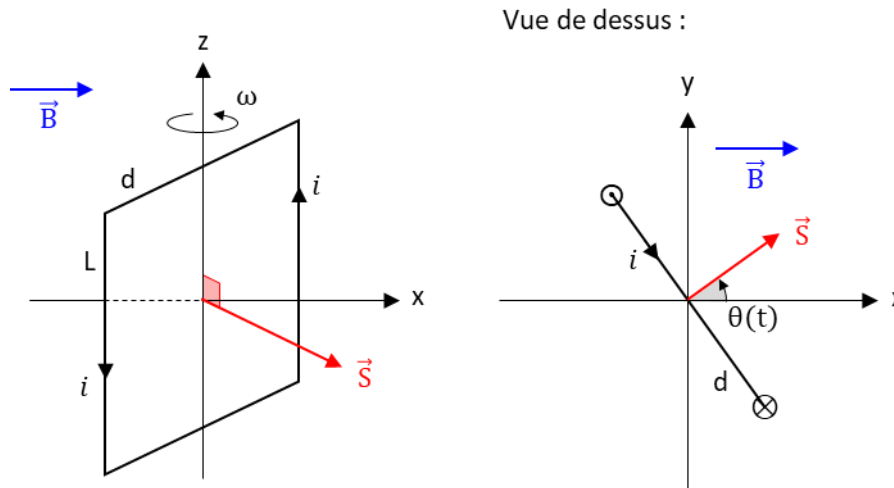
II - Spire en rotation

II.1 - Dispositif

On reprend l'étude de la spire en rotation.

Hypothèses :

- \vec{B} est uniforme et stationnaire.
- On néglige l'induction propre $\Rightarrow \vec{B}_{tot} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_p \simeq \vec{B}_{ext}$.
- On note R la résistance électrique de la spire.
- On suppose que la barre est soumise à un couple moteur $\vec{\Gamma}_{mo} = \Gamma_{mo} \vec{e}_z$ avec $\Gamma_{mo} > 0$.



II.2 - Étude qualitative

Le couple moteur $\vec{\Gamma}_{mo}$ met en rotation la spire selon $+\vec{e}_z$

$\Rightarrow |\phi|$ varie

\Rightarrow apparition d'une fem induite

\Rightarrow apparition d'un courant induit

\Rightarrow apparition d'un couple de Laplace selon $-\vec{e}_z \rightarrow$ s'oppose au couple moteur

θ	0	$\pi/2$	π	$-\pi/2$	0				
$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$	BS	\searrow	0	\swarrow	-BS	\nearrow	0	\nearrow	BS
$e = -\frac{d\phi}{dt}$		> 0				< 0			
$i = \frac{e}{R}$		> 0				< 0			
$\mathcal{M}_L = (\vec{\mu} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z$ $= -i(t)SB \sin(\theta)$		< 0				< 0			

La loi de Lenz est bien vérifiée.

II.3 - Étude quantitative

- Calcul du flux (pas de champ induit) :

$$\phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S}(t) = \boxed{BS \cos(\theta)}$$

- Loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = BS\omega \sin(\theta)$$

○ Loi des mailles :

$$e(t) = Ri(t) = BS\omega \sin(\theta) \quad (EE)$$

○ Équation mécanique :

Système = {spire}. Référentiel = terrestre supposé galiléen.

Bilan des moments :

○ Couple moteur : $\vec{\Gamma}_{mo} = \Gamma_{mo} \vec{e}_z$;

○ Moment du couple de Laplace :

$$\vec{\Gamma}_L = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = i(t) \vec{S} \wedge B \vec{e}_x = -i(t)SB \sin(\theta) \vec{e}_z$$

○ Liaison pivot parfaite (pas de couple de frottement).

On note J_z le moment d'inertie de la spire selon l'axe (Oz). On applique le TMC :

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{mo} - i(t)BS \sin(\theta) \quad (EM)$$

○ On découple les équations :

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{mo} - \frac{B^2 S^2}{R} \omega \sin^2(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{B^2 S^2}{R J_z} \dot{\theta} \sin^2(\theta) = \frac{\Gamma_{mo}}{J_z}$$

On ne sait pas résoudre (voir TD pour une solution approchée). On peut tout de même extraire des propriétés physiques pertinentes.

Constante de temps du régime transitoire :

$$\tau = \frac{R J_z}{B^2 S^2}$$

En régime permanent :

$$\omega(t) = \omega_\infty + g(t) \text{ avec : } \omega_\infty = \langle \omega \rangle \text{ et donc } \langle g(t) \rangle = 0.$$

Ainsi :

○ $\langle \dot{\omega} \rangle = \langle \dot{g} \rangle = 0$

○ $\langle \omega \rangle = \omega_\infty$

○ $\langle \sin^2(\theta) \rangle = \frac{1}{2}$

On en déduit :

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega}{\tau} \sin^2(\theta) = \frac{\Gamma_{mo}}{J_z} \xrightarrow{t \rightarrow \infty \text{ et } \langle \cdot \rangle} 0 + \frac{\omega_\infty}{2\tau} = \frac{\Gamma_{mo}}{J_z} \Rightarrow \omega_\infty = 2\tau \frac{\Gamma_{mo}}{J_z}$$

II.4 - Bilan énergétique

Bilan de puissance : on multiplie (EE) par $i(t)$ et (EM) par $\omega(t)$.

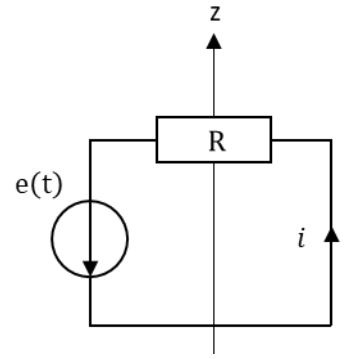
$$\underbrace{BS\omega \sin(\theta) i(t)}_{\mathcal{P}_{fem}} = \underbrace{R i^2(t)}_{\mathcal{P}_{Joule}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J_z \omega^2(t) \right)}_{\mathcal{E}_{cin}} = \underbrace{\Gamma_{mo} \omega(t)}_{\mathcal{P}_{motrice}} - \underbrace{i(t) \omega(t) BS \sin(\theta)}_{\mathcal{P}_{Laplace}}$$

On constate que : $\mathcal{P}_{fem} + \mathcal{P}_{Laplace} = 0$

On somme les deux bilans.

$$\mathcal{P}_{motrice} = \frac{d\mathcal{E}_{cin}}{dt} + \mathcal{P}_{Joule}$$

Même bilan que pour le rail de Laplace.



III - Freinage par induction

III.1 - Expérience

Expérience : on lâche un aimant dans un tube métallique.

Observation : il est freiné dans sa chute.

Interprétation : à l'aide de la loi de modulation de Lenz

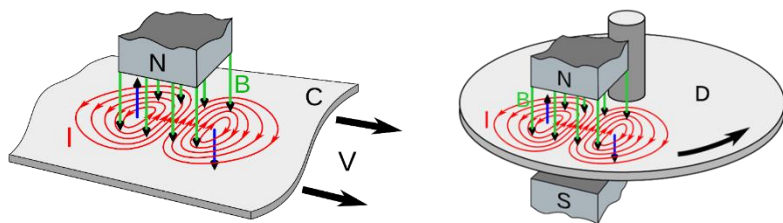
- En dessous de l'aimant : lors de la chute, le flux augmente \Rightarrow création d'une boucle de courant pour contrer l'augmentation de flux.
- Au-dessus de l'aimant : lors de la chute, le flux diminue \Rightarrow création d'une boucle de courant pour contrer la diminution de flux.

Ces courants sont appelés **courants de Foucault**. Ils dissipent de l'énergie par effet Joule. On a donc une énergie cinétique moins importante.

III.2 - Applications

a) Exploitation des courants de Foucaults

On peut se servir des courants de Foucault pour freiner des véhicules.

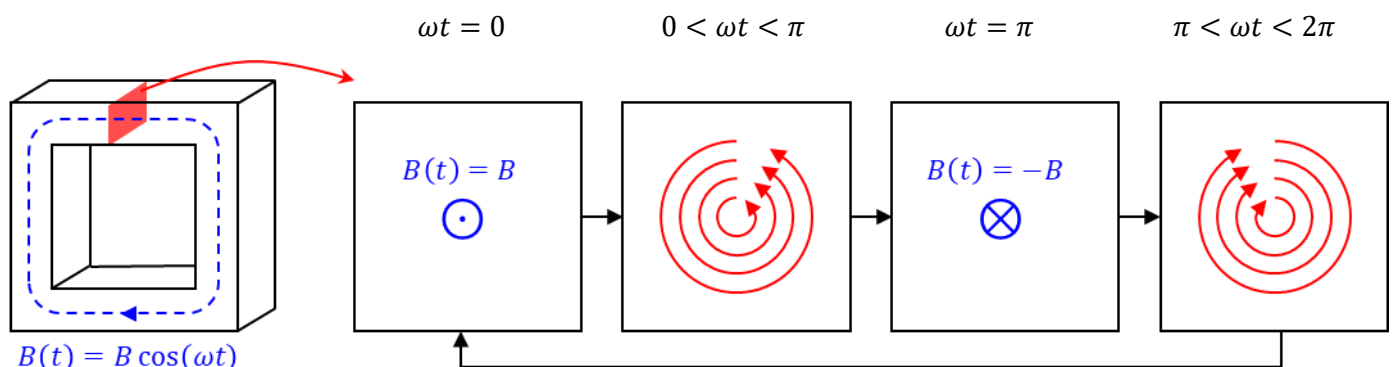


Avantage : permet de freiner le véhicule sans contact physique (moins d'usure).

Inconvénient : pas efficace à faible vitesse, ne peut pas stopper entièrement le véhicule.

b) Réduction des courants de Foucault

Dans le tore ferromagnétique d'un transformateur, on peut éviter les pertes par effet Joule des courants de Foucault.

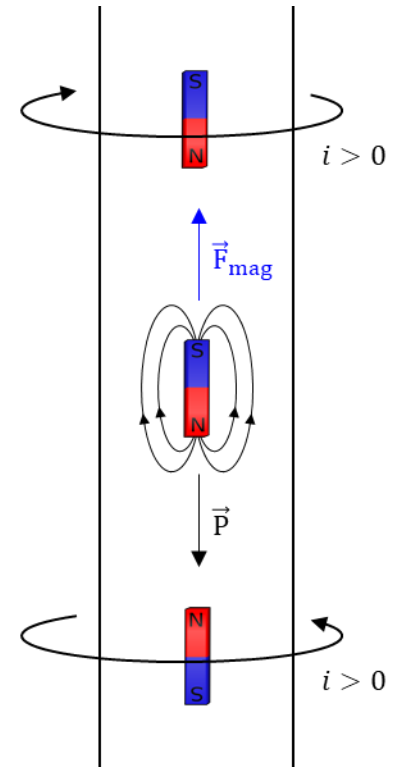


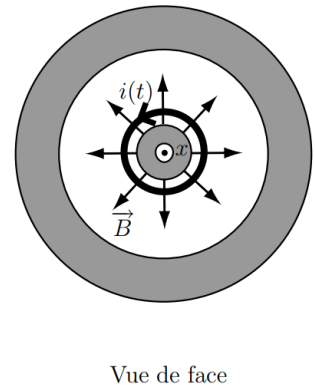
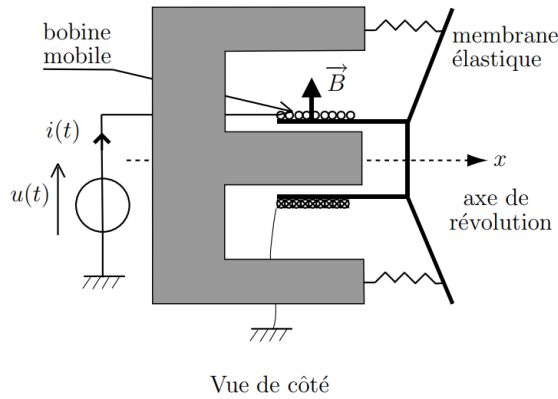
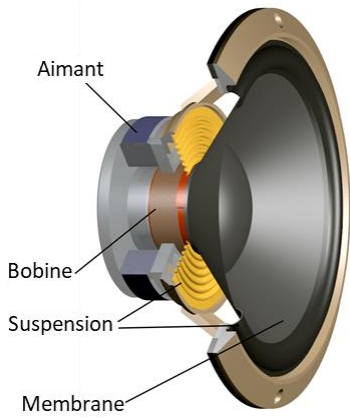
Solution : feuilletter le cuivre pour empêcher l'apparition des courants de Foucault.

IV - Haut-parleur électrodynamique

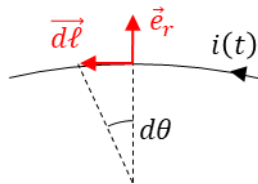
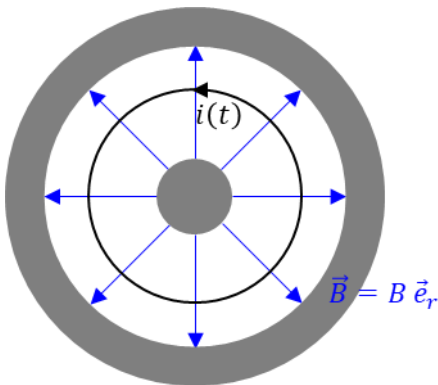
IV.1 - Modélisation

Un haut-parleur est un appareil électromécanique qui transforme un signal électrique en signal sonore.





○ Force de Laplace :



Soit un morceau $d\ell$ de conducteur.

$$d\vec{\ell} = r_0 d\theta \vec{e}_\theta$$

Force élémentaire de Laplace :

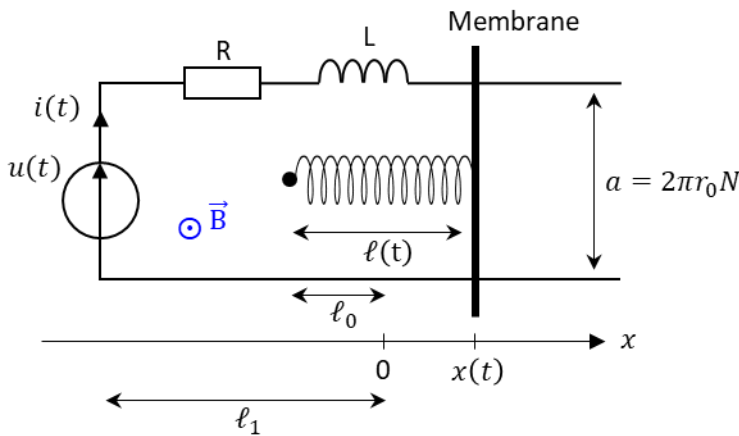
$$d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = -i B r_0 d\theta \vec{e}_x$$

Force totale sur le conducteur :

$$\vec{F}_L = \int_0^{N \cdot 2\pi} -i B r_0 d\theta \vec{e}_x = -\underbrace{2\pi N r_0}_a i B \vec{e}_x$$

Tout se passe comme dans un rail de Laplace avec une longueur de tige $a = 2\pi N r_0$.

○ Modélisation du haut-parleur :



Bilan des forces :

○ Force de Laplace :

$$\vec{F}_L = -i a B \vec{e}_x$$

○ Force de rappel élastique :

$$\vec{F}_{el} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{e}_x = -k x(t) \vec{e}_x$$

○ Force de frottement fluide de l'air sur la membrane :

$$\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$$

IV.2 - Étude quantitative

○ Équation électrique :

Deux rédactions possibles.

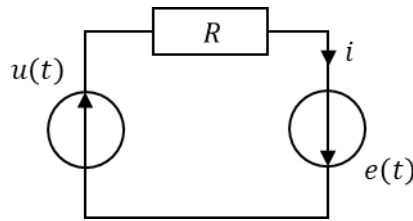
Flux :

$$\underbrace{\Phi}_{\text{Flux total}} = \underbrace{\Phi_{\text{ext}}}_{\text{Flux de } B_{\text{ext}}} + \underbrace{\Phi_p}_{\text{Flux propre}} = \vec{B} \cdot \vec{S}(t) + L i(t) = -a B (\ell_1 + x(t)) + L i(t)$$

Loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = a B v(t) - L \frac{di}{dt}$$

Circuit équivalent :



Loi des mailles :

$$u(t) + e(t) = R i(t)$$

Ainsi,

$$u(t) = R i(t) + L \frac{di}{dt} - aB v(t) \quad (EE)$$

o Équation mécanique :

On applique le PFD :

$$m \frac{dv}{dt} = -iaB - \alpha v - k x(t) \quad (EM)$$

IV.3 - Bilan énergétique

Bilan de puissance : on multiplie (EE) par $i(t)$ et (EM) par $v(t)$.

$$\underbrace{u(t)i(t)}_{\mathcal{P}_{gen}} + \underbrace{aB v(t)i(t)}_{\mathcal{P}_{fem}} = \underbrace{R i^2(t)}_{\mathcal{P}_{Joule}} + \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L i^2(t) \right)}_{\mathcal{E}_{mag}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2(t) \right)}_{\mathcal{E}_{cin}} = - \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} k x^2(t) \right)}_{\mathcal{E}_{p,el}} - \underbrace{\alpha v^2(t)}_{\mathcal{P}_{frot}} - \underbrace{i(t)v(t) aB}_{\mathcal{P}_{Laplace}}$$

On somme les deux bilans.

$$\mathcal{P}_{gen} = \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_{mag} + \mathcal{E}_{cin} + \mathcal{E}_{p,el}) + R i^2(t) + \alpha v^2(t)$$

La puissance fournie par le générateur est stockée sous forme d'énergie magnétique, cinétique et potentielle élastique, et est dissipée par effet Joule et par frottement fluide.

IV.4 - Impédance équivalente

Déterminons l'impédance électrique équivalente du haut-parleur :

$$\underline{u} = \underline{Z} \cdot \underline{i}$$

On passe en RSF :

$$(EM) \Rightarrow \left(j\omega m + \alpha + \frac{k}{j\omega} \right) \underline{v} = -aB \underline{i}$$

$$(EE) \Rightarrow \underline{u} = \left(R + j\omega L + \frac{a^2 B^2}{j\omega m + \alpha + \frac{k}{j\omega}} \right) \underline{i}$$

On en déduit :

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega \frac{m}{a^2 B^2} + \frac{\alpha}{a^2 B^2} + \frac{k/a^2 B^2}{j\omega}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_m + \frac{1}{R_m} + \frac{1}{j\omega L_m}}$$

Avec :

$$C_m = \frac{m}{a^2 B^2} \quad R_m = \frac{a^2 B^2}{\alpha} \quad L_m = \frac{k}{a^2 B^2}$$

Circuit équivalent :

