Induction | Chapitre 4 | Cours

I4 · Circuit fixe dans un champ variable

Dans le chapitre précédent nous avons identifié la cause de l'apparition de phénomène d'induction dans un circuit fermé : il s'agit de la variation au cours du temps du flux magnétique à travers une surface qui s'appuie sur ce circuit. Et nous avons distingué deux cas particuliers de systèmes sièges de phénomènes d'induction.

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'induction de Neumann : on s'intéresse à un circuit fixe et rigide dans le référentiel d'étude, soumis à un champ magnétique extérieur qui dépend du temps. Les applications de l'induction de Neumann sont nombreuses : radio-identification, détecteurs de métaux, détection de présence d'un véhicule à un feu rouge, rechargement sans fil et le transformateur (que nous étudierons en détail dans le cours).

I - Auto-induction

I.1 - Inductance propre

Définitions :

Soit un circuit orienté parcouru par un courant $i(t)$. Ce courant crée un champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}_\mathrm{p}(\mathrm{M}, t)$ appelé **champ propre**.

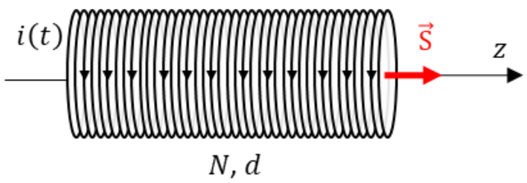
On appelle **flux propre**, noté $\phi_\mathrm{p}(t)$, le flux du champ propre à travers la surface du circuit qui lui a donné naissance. On appelle **inductance propre** le rapport du flux propre et de l'intensité. C'est une constante qui ne dépend que de la géométrie du circuit.

$$\boxed{\phi_\mathrm{p}(t) = \iint_{\text{Circuit}} \vec{\mathrm{B}}_\mathrm{p}(\mathrm{M}, t) \cdot \overrightarrow{\mathrm{dS}} = \mathrm{L} \times i(t)}$$

Attention ! Il s'agit bien du flux du champ créé par le circuit lui-même. Il ne faut pas tenir compte d'éventuels champs extérieurs.

Exemple :

Soit une bobine longue d'axe (Oz), avec N spires, de longueur d et parcouru par un courant $i(t)$.



On rappelle que le champ créé par une bobine infinie dans la bobine vaut :

$$\vec{B}_p(t) = \mu_0 n\, i(t)\, \vec{e}_z = \mu_0 \frac{N}{d} i(t)\, \vec{e}_z$$

Le flux de $\vec{B}_p$ à travers une spire vaut :

$$\phi_1 = \mu_0 \frac{N}{d} i(t)\, \vec{e}_z \cdot S\, \vec{e}_z = \mu_0 \frac{NS}{d} i(t)$$

Le flux propre vaut donc :

$$\phi_\mathrm{p} = \mathrm{N}\phi_1 = \mu_0 \frac{N^2 S}{d} i(t)$$

On en déduit l'inductance propre :

$$\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2 S}{d}}$$

Ordre de grandeur :

Pour une bobine de TP classique : $\mathrm{N} = 500$ spires, $d = 10$ cm et $\mathrm{R} = 3$ cm. Ainsi, $\boxed{\mathrm{L} \simeq 175 \text{ mH}}$

I.2 - Schéma équivalent

Soit un circuit orienté parcouru par un courant $i(t)$.

La loi de faraday affirme qu'il existe une fem qui vaut, en **<u>convention générateur</u>** :

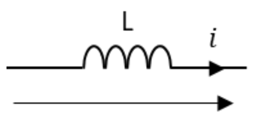
$$\boxed{\mathrm{e} = -\frac{\mathrm{d}\phi_\mathrm{p}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}}$$

<u>Remarque</u> :

En théorie, cette fem existe dans tous les éléments d'un circuit. En pratique, elle est non négligeable ssi L est suffisamment grand. C'est par exemple le cas d'une bobine.

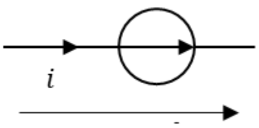
<u>Conséquence</u> :

Une bobine est donc équivalente à un générateur de tension (générateur de Thévenin) de f.é.m. $\mathrm{e} = -\mathrm{L}\ \mathrm{di}/\mathrm{dt}$, en convention générateur.



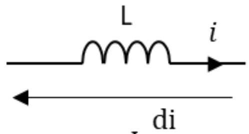
Convention générateur

$\Leftrightarrow$



$$e = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

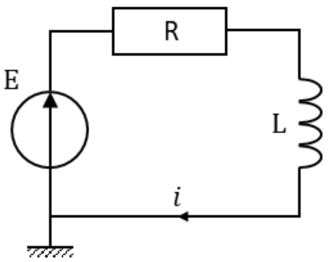
$\Leftrightarrow$

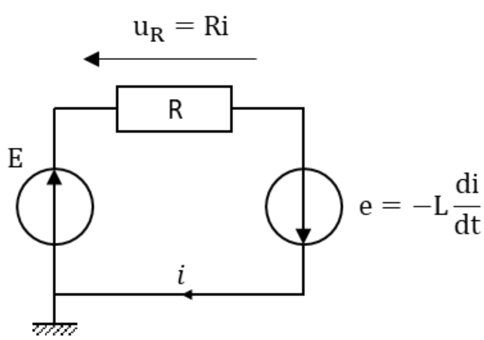


$$\mathrm{u} = \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}}$$

I.3 - Bilan énergétique

Soit le circuit RL. On remplace l'inductance par un générateur équivalent.





Loi des mailles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} + \mathrm{e} = \mathrm{Ri} \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{E} = \mathrm{Ri} + \mathrm{L}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{E\,i} = \mathrm{Ri}^2 + \mathrm{L\,i}\frac{\mathrm{di}}{\mathrm{dt}} \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{\mathrm{E\,i}}_{\mathcal{P}_\mathrm{g}} = \underbrace{\mathrm{Ri}^2}_{\mathcal{P}_\mathrm{j}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{1}{2}\mathrm{L\,i}^2\right)}_{\mathcal{P}_\mathrm{mag}}
\end{aligned}$$

Avec :

- $\mathcal{P}_\mathrm{j}$ la puissance dissipée par effet Joule ;
- $\mathcal{P}_\mathrm{mag}$ la puissance magnétique stockée par le circuit (sous l'effet du phénomène d'auto-induction) ;
- $\mathcal{P}_\mathrm{g} = \mathrm{P_j} + \mathrm{P_{mag}}$ la puissance fournie par le générateur.

Pour trouver les énergies, on intègre sur le temps de l'expérience.

<u>Définition</u> :

On définit l'énergie magnétique stockée grâce aux phénomènes d'auto-induction :

$$\mathcal{P}_\mathrm{mag} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_\mathrm{mag}}{\mathrm{dt}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_\mathrm{mag} = \frac{1}{2}\mathrm{L\,i}^2}$$

II - Induction mutuelle

II.1 - Définition

Soit deux circuits fixes indépendants. Le circuit (1) est parcouru par un courant $i_1(t)$ qui génère un champ magnétique propre $\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p1}}(\mathrm{M},t)$. Le circuit (2) est parcouru par un courant $i_2(t)$ qui génère un champ magnétique propre $\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p2}}(\mathrm{M},t)$. En tout point M de l'espace, le champ total vaut :

$$\vec{B}_{tot}(\mathrm{M},t) = \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p1}}(\mathrm{M},t) + \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p2}}(\mathrm{M},t)$$

Le flux magnétique traversant le circuit (1) vaut :

$$\begin{aligned}\phi_1(t) = \iint_{\text{Circuit 1}} \vec{B}_{tot}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}}_1 = \iint_{\text{Circuit 1}} \left(\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p1}} + \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p2}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}}_1 &= \underbrace{\iint_{\text{Circuit 1}} \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p1}}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{dS}_1}_{} + \underbrace{\iint_{\text{Circuit 1}} \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p2}}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{dS}_1}_{} \\ &= \phi_{1\to1} = \phi_{\mathrm{p1}} + \phi_{2\to1} \\ &= L_1\, i_1(t) + M\, i_2(t)\end{aligned}$$

De même, le flux magnétique traversant le circuit (2) vaut :

$$\begin{aligned}\phi_2(t) = \iint_{\text{Circuit 2}} \vec{B}_{tot}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}}_2 = \iint_{\text{Circuit 2}} \left(\vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p1}} + \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p2}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}}_2 &= \underbrace{\iint_{\text{Circuit 2}} \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p2}}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{dS}_2}_{} + \underbrace{\iint_{\text{Circuit 2}} \vec{\mathrm{B}}_{\mathrm{p2}}(\mathrm{M},t)\cdot\overrightarrow{dS}_2}_{} \\ &= \phi_{2\to1} + \phi_{2\to2} = \phi_{\mathrm{p2}} \\ &= M\, i_1(t) + L_2\, i_2(t)\end{aligned}$$

<u>Avec</u> : $\phi_{j\to k}$ le flux du champ $\vec{B}_j$ à travers le circuit (k)

<u>Définition</u> :

On admet que le flux $\phi_{j\to k}(t)$ est proportionnel au courant $i_j(t)$. On appelle **coefficient d'inductance mutuelle**, noté M, le coefficient de proportionnalité.

$$\boxed{\phi_{j\to k}(t) = \mathrm{M}\times i_j(t)}$$

<u>Propriétés</u> :

- Deux circuits couplés ont le même coefficient d'induction mutuel.

$$\boxed{M = \frac{\phi_{1\to2}}{i_1} = \frac{\phi_{2\to1}}{i_2}}$$

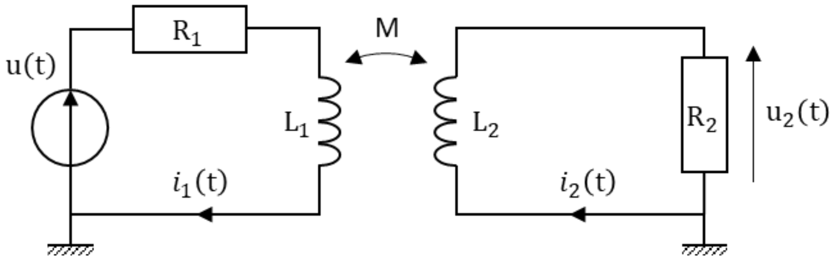
- M peut être négatif ou positif. Son signe dépend des orientations des circuits. Sa valeur absolu dépend de la géométrie des circuits et de leur position relative.

II.2 - Circuits couplés

a) Position du problème

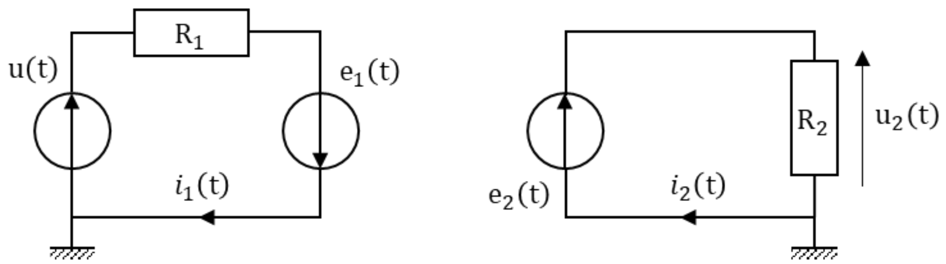
On considère les circuits suivants.

<u>Objectif</u> : obtenir les ED dont sont solutions $i_1(t)$ et $i_2(t)$.



b) Schéma équivalent

On remplace les inductances par des générateurs de tension **<u>en convention générateur</u>**.



Loi de Faraday :

$$\begin{cases} e_1 = -\dfrac{d\phi_1}{dt} = -\dfrac{d}{dt}(\phi_{p1} + \phi_{2\to 1}) = -\dfrac{d}{dt}\big(L_1 i_1(t) + M i_2(t)\big) = -L_1\dfrac{di_1}{dt} - M\dfrac{di_2}{dt} \\ e_2 = -\dfrac{d\phi_2}{dt} = -\dfrac{d}{dt}(\phi_{p2} + \phi_{1\to 2}) = -\dfrac{d}{dt}\big(L_2 i_2(t) + M i_1(t)\big) = -L_2\dfrac{di_2}{dt} - M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Loi des mailles :

$$u + e_1 = R_1 i_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = R_1 i_1 + L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}}$$

$$e_2 = R_2 i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{0 = R_2 i_2 + L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}}$$

On obtient deux équations différentielles couplées.

c) Régime sinusoïdal forcé

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t)$$

On passe en notation complexe. Les équations deviennent :

$$\boxed{\underline{u} = j\omega\left(L_1\,\underline{i_1} + M\,\underline{i_2}\right) + R_1\underline{i_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{0 = j\omega\left(L_2\,\underline{i_2} + M\,\underline{i_1}\right) + R_2\underline{i_2}}$$

On peut découpler facilement les équations.

d) Bilan énergétique

Bilan de puissance :

$$u i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1\frac{di_1}{dt} + M i_1\frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad 0 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2\frac{di_2}{dt} + M i_2\frac{di_1}{dt}$$

On somme les deux bilans :

$$\underbrace{u i_1}_{\mathcal{P}_{gen}} = \underbrace{R_1 i_1^2}_{\mathcal{P}_{Joule,1}} + \underbrace{R_2 i_2^2}_{\mathcal{P}_{Joule,2}} + \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}L_1 i_1}_{\mathcal{E}_{mag,1}} + \underbrace{\frac{1}{2}L_2 i_2}_{\mathcal{E}_{mag,2}} + \underbrace{M\,i_1 i_2}_{\mathcal{E}_{couplage}}\right)$$

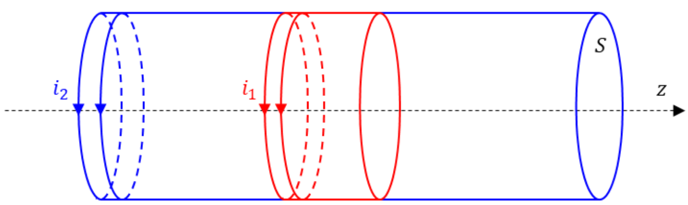
<u>Propriété</u> :

On appelle **énergie de couplage magnétique** stockée dans les deux bobines :

$$\boxed{\mathcal{E}_{couplage} = M\,i_1 i_2}$$

II.3 - Cas d'une influence totale

On considère 2 bobines longues de même surface S emboitées l'une dans l'autre, possédant respectivement N_1 et N_2 spires et de longueur d_1 et $d_2 > d_1$.



Dans cette configuration, toutes les lignes de champ de la bobine (2) passent par la bobine (1). Les bobines sont dites en **influence totale**.

<u>Objectif</u> : déterminer la valeur de M dans le cas d'une influence totale.

On rappelle le champ propre d'une bobine : $\vec{B}_p = \mu_0 n \, i \, \vec{u}_z$

Calculons $\phi_{2\to1}$:

$$\phi_{2\to\text{une spire de }1} = \vec{B}_2 \cdot \vec{S}_1 = \mu_0 n_2 i_2 \, \vec{u}_z \cdot S \, \vec{u}_z = \mu_0 n_2 S \, i_2 \quad \Rightarrow \quad \phi_{2\to1} = N_1 \, \phi_{2\to\text{une spire de }1} = \mu_0 n_2 N_1 S \, i_2$$

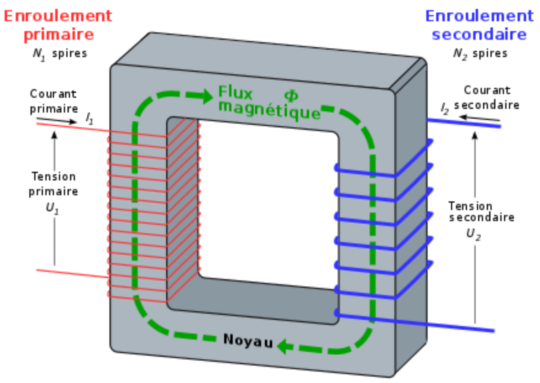
On en déduit :

$$\boxed{M = \frac{\phi_{2\to1}}{i_2} = \mu_0 n_2 N_1 S}$$

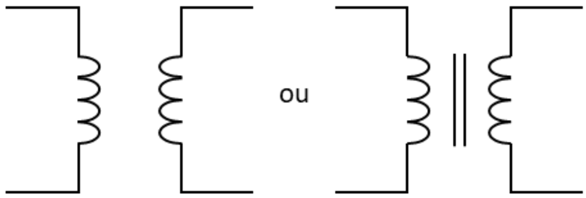
II.4 - Applications

a) Transformateur parfait

Un transformateur est constitué par deux bobinages (primaire et secondaire) enroulés autour d'un tore de matériau ferromagnétique.



Représentation schématique du transformateur :



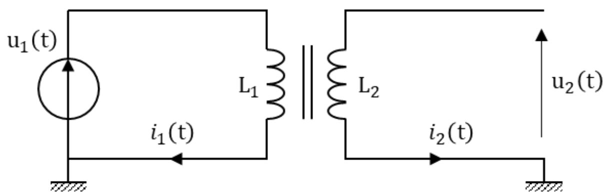
Le noyau de ferromagnétique permet de canaliser les lignes de champ ⇒ cela permet d'obtenir une influence totale sans emboiter les bobines.

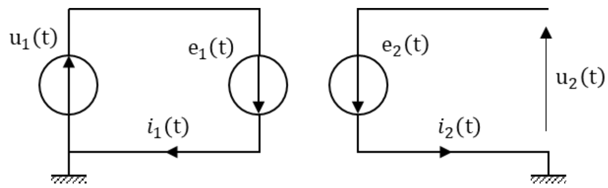
Modèle du transformateur parfait, on considère :

- les résistances des bobinages sont nulles ;
- aucune fuite de ligne de champ.

On met une source de tension variable au niveau du primaire.

Schéma électrique du transformateur parfait et schéma équivalent :





On note :

$$\phi_0(t) = \vec{B}_{tot}(t) \cdot \vec{S} = \left(\vec{B}_{p1} + \vec{B}_{p2}\right) \cdot \vec{S}$$

le flux du champ magnétique à travers une surface du tore.

$$e_1(t) = -\frac{d\phi_1}{dt} = -N_1 \frac{d\phi_0}{dt} = -u_1(t) \quad et \quad e_2(t) = -\frac{d\phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d\phi_0}{dt} = -u_2(t)$$

<u>Propriété</u> :

Dans un transformateur idéal, les tensions au primaire et au secondaire sont liées par la relation :

$$\boxed{\frac{u_2(t)}{u_1(t)} = \frac{N_2}{N_1} = m}$$

où m se nomme le **rapport de transformation**.

Si le transformateur est idéal, il transfert la totalité de la puissance électrique, ainsi :

$$u_1(t)\, i_1(t) = u_2(t) i_2(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{i_2(t)}{i_1(t)} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{m}}$$

<u>ATTENTION</u> ! Ne marche pas en régime permanant.

<u>Intérêt</u> :

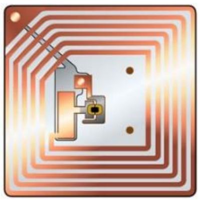
Un transformateur permet de diminuer ou d'augmenter la tension.

- le transport de l'énergie à très haute tension (400 kV) puis retour aux hautes tensions (40 kV) et aux tensions du secteur (230 V) ;
- le **transformateur d'isolement** (rapport $m = 1$). Il permet d'isoler électriquement le primaire et le secondaire (permet d'avoir deux masses, une dans chaque circuit).

<u>Application de TP</u> : mesure de la caractéristique d'un dipôle.

b) Autres applications

- Puce RFID



Permet la transmission à distance d'informations placées sur une puce ne possédant pas de générateur. Lorsque la puce passe près d'un lecteur, un champ magnétique oscillant aimante la puce, qui envoie les informations quelle contient.

Utilisation de la puce RFID : Antivols, forfaits de ski, badges de télépéage...

- Détecteur de métaux
- Plaque à induction
- Rechargement par induction (téléphones portables).