



I2 · Actions d'un champ magnétique

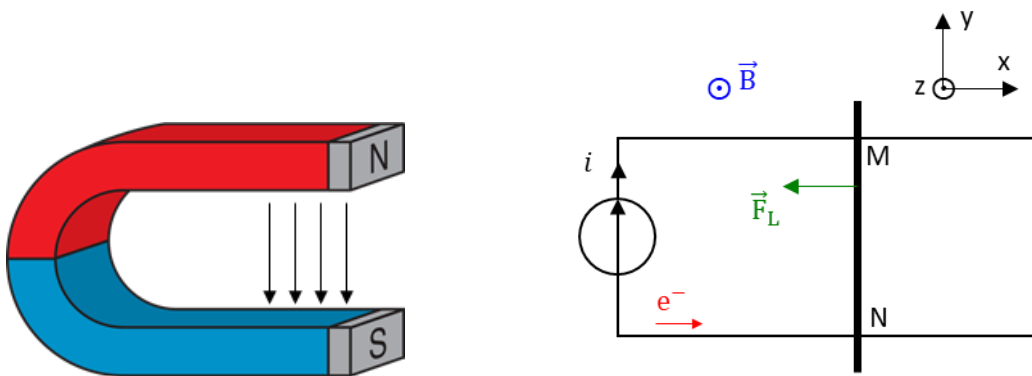
Dans ce cours, nous allons apprendre à calculer les actions (forces et moments) que crée un champ magnétique sur un circuit électrique.

I - Barre en translation

I.1 - Expérience : rails de Laplace

Expérience :

Expérience des rails de Laplace : circuit électrique + tige mobile dans un champ magnétique uniforme et stationnaire. On fait passer un courant i dans le circuit.



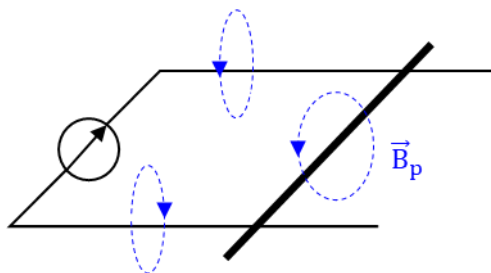
Résultats de l'expérience :

- La tige se met en mouvement lorsque le courant est présent \Rightarrow une force est apparue, appelée **force de Laplace**.
- La tige part dans un sens ou un autre selon le sens de i et selon le sens de B .

Cette expérience montre qu'il est possible de convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique.

Remarque :

On appelle **champ propre** \vec{B}_p le champ magnétique créé par un circuit.

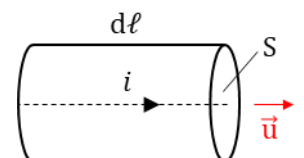


Le champ magnétique total vaut donc : $\vec{B}_{tot} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_p$

Dans ce chapitre, on négligera toujours le champ propre : $\vec{B}_{tot} \approx \vec{B}_{ext}$

I.2 - Force élémentaire de Laplace

Soit une portion $d\ell$ de surface transverse S d'un fil conducteur parcouru par un courant i . On note \vec{u} le vecteur unitaire dans le sens de i choisi. On note n la densité volumique d'électrons (nombre d'électrons par unité de volume) et $\vec{v}_e = \frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\ell}{dt} \vec{u}$ la vitesse d'un électron.



Le nombre d'électrons traversant la surface S pendant dt vaut : $\delta N = n S d\ell$

La charge totale traversant la surface S pendant dt vaut : $dq = -e \delta N = -e n S d\ell$

On en déduit le courant :

$$i = \frac{dq}{dt} = -e n S \frac{d\ell}{dt} = -e n S v_e$$

Le conducteur est placé dans un champ magnétique \vec{B} . Chaque électron en mouvement est soumis à la force de Lorentz : $\vec{F}_{\text{Lorentz}} = -e \vec{v}_e \wedge \vec{B}$. Le conducteur subit donc une force résultante :

$$d\vec{F} = \delta N \vec{F}_{\text{Lorentz}} = n S d\ell \cdot \left(-e \frac{d\ell}{dt} \wedge \vec{B} \right) = -e n S v_e \times d\ell \wedge \vec{B} = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

Propriété :

La **force élémentaire de Laplace**, correspondant la résultante des forces de Lorentz, s'exerçant sur un conducteur de longueur $d\ell$ et orienté dans la direction \vec{u} , vaut :

$$d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad \text{avec : } d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}$$

On définit également la **densité linéique de la force de Laplace** (= force par unité de longueur) :

$$\vec{F}_L = \frac{d\vec{F}_L}{d\ell} = i \vec{u} \wedge \vec{B}$$

Remarque : le choix d'orientation de i et donc de \vec{u} est arbitraire et doit toujours être indiqué sur un schéma.

I.3 - Résultante des forces de Laplace

Soit un champ \vec{B} uniforme.

La résultante de la force de Laplace s'exerçant sur un conducteur d'un point M à point N vaut :

$$\vec{F}_L(MN) = \int_M^N i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i \left(\int_M^N d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = i \overline{MN} \wedge \vec{B}$$

Application : rails de Laplace

$$\vec{F}_L = i \overline{MN} \wedge \vec{B} = -iaB \vec{u}_x$$

On retrouve bien une force dans le parallèle aux rails, dont le sens dépend de B et de i .

I.4 - Puissance des forces de Laplace

La puissance de la force de Laplace qui s'exerce sur une barre conductrice animée d'une vitesse \vec{v} vaut :

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = (i \overline{MN} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

ATTENTION ! Ici le \vec{v} désigne bien la vitesse de la barre, plus la vitesse des électrons.

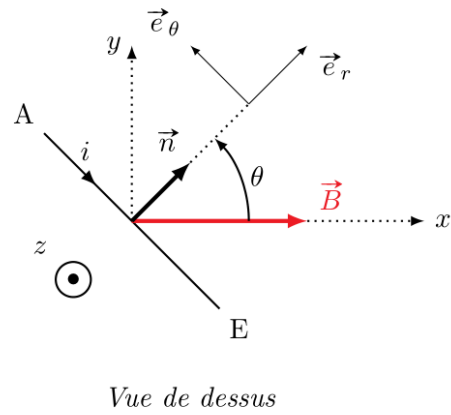
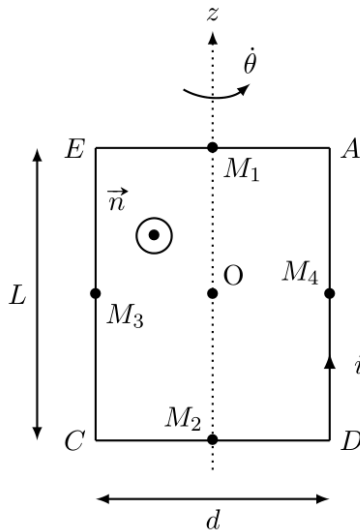
Application : rails de Laplace

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -iaB \vec{u}_x \cdot \vec{v} = -iaBv_x$$

II - Spire en rotation

II.1 - Position du problème

On considère un cadre rectangulaire AECD parcouru par un courant i . L'axe (Oz) est une liaison pivot parfaite. On impose un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_x$. On note θ l'angle entre \vec{B} et \vec{n} (vecteur unitaire normal à la spire).



II.2 - Résultante des forces de Laplace

Rappel : force de Laplace subit par un segment MN :

$$\vec{F}_L(MN) = i \overline{MN} \wedge \vec{B}$$

La résultante des forces Laplace est la somme des forces sur chacun des éléments du cadre, c'est-à-dire :

$$\vec{F}_L(\text{spire}) = i (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) \wedge \vec{B} = i \overline{AA} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Propriété : La résultante des forces de Laplace sur un circuit fermé est donc toujours nulle (si \vec{B} uniforme).

Démonstration :

$$\vec{F}_L(\text{spire}) = \int_M^M i \overline{d\ell} \wedge \vec{B} = i \left(\int_M^M \overline{d\ell} \right) \wedge \vec{B} = i \overline{MM} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

Conséquence : Le centre de masse (O) est immobile.

II.3 - Moment du couple de Laplace

Chaque segment subit une force de Laplace qui s'applique à son centre de masse (points M_i). Calculons le moment de ces forces.

○ Segment AE :

$$\vec{F}_L(AE) = i \overline{AE} \wedge \vec{B} = i (-d\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_x) = idB \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_z \Rightarrow \mathcal{M}_z(AE) = \underbrace{\left(\overline{OM_1} \wedge \underbrace{\vec{F}_L(AE)}_{\parallel \vec{e}_z} \right)}_{\perp \vec{e}_z} \cdot \vec{e}_z = 0$$

○ Segment CD :

$$\vec{F}_L(CD) = i \overline{CD} \wedge \vec{B} = i (d\vec{e}_\theta \wedge B\vec{e}_x) = -idB \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_z \Rightarrow \mathcal{M}_z(AE) = \underbrace{\left(\overline{OM_2} \wedge \underbrace{\vec{F}_L(CD)}_{\parallel \vec{e}_z} \right)}_{\perp \vec{e}_z} \cdot \vec{e}_z = 0$$

○ Segment EC :

$$\begin{aligned} \vec{F}_L(EC) &= i \overline{EC} \wedge \vec{B} = i (-L\vec{e}_z \wedge B\vec{e}_x) = -iLB \vec{e}_y \\ \Rightarrow \mathcal{M}_z(EC) &= \left(\overline{OM_3} \wedge \vec{F}_L(EC) \right) \cdot \vec{e}_z = \left(-\frac{d}{2} \vec{e}_\theta \wedge -iLB \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_z = -\frac{idLB}{2} \sin(\theta) \end{aligned}$$

○ Segment DA :

$$\begin{aligned} \vec{F}_L(DA) &= i \overline{DA} \wedge \vec{B} = i (L\vec{e}_z \wedge B\vec{e}_x) = iLB \vec{e}_y \\ \Rightarrow \mathcal{M}_z(DA) &= \left(\overline{OM_4} \wedge \vec{F}_L(DA) \right) \cdot \vec{e}_z = \left(\frac{d}{2} \vec{e}_\theta \wedge iLB \vec{e}_y \right) \cdot \vec{e}_z = -\frac{idLB}{2} \sin(\theta) \end{aligned}$$

Remarque : on retrouve bien que la résultante des forces de Laplace est nulle.

Le moment du couple de Laplace vaut : $\mathcal{M}_z = -idLB \sin(\theta)$

Or, on remarque que : $\mathcal{M}_z = -iS\mathbf{B} \sin(\theta) = (i\vec{S} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z = (\vec{\mu} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_z$

On admet la généralisation.

Propriété :

Le **moment du couple des forces des Laplace** d'une spire de moment magnétique $\vec{\mu}$ plongée dans un champ uniforme et stationnaire \vec{B} vaut :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

Avec O le centre de la spire.

II.4 - Puissance du couple de Laplace

Rappel : La puissance d'un moment \mathcal{M}_Δ vaut :

$$\mathcal{P}_L = \mathcal{M}_\Delta \omega$$

Application à la spire :

$$\mathcal{P}_L = -idLB \sin(\theta) \dot{\theta}$$

III - Action d'un champ magnétique sur un aimant

III.1 - Cas d'un champ uniforme

Soit un aimant de moment magnétique $\vec{\mu}$ placé dans un champ magnétique uniforme.

À l'aide du résultat précédent, on en déduit :

- La résultante des forces de Laplace est nulle :

$$\vec{F}_L = \vec{0}$$

Donc le centre de masse de l'aimant est immobile.

- Le moment du couple de Laplace qui s'applique sur l'aimant :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = -\mu B \sin(\theta) \vec{e}_z$$

On note J_z le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe (Oz). On applique le théorème du moment cinétique :

$$J_z \ddot{\theta} = -\mu B \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) \quad \text{avec : } \omega_0 = \sqrt{\frac{\mu B}{J_z}}$$

Positions d'équilibre :

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_{eq} = 0 \\ \theta_{eq} = \pi \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité des positions, on pose : $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$ avec $\varepsilon \ll 1$ rad et on regarde la stabilité de la solution de l'ED.

- Stabilité de $\theta_{eq} = 0$:

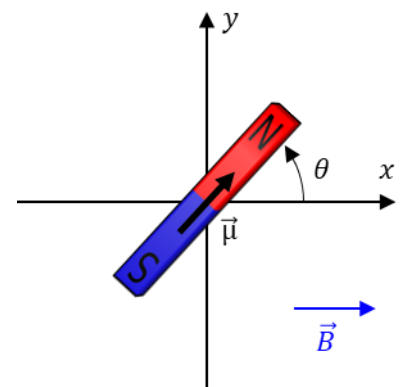
$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \sin(\varepsilon) = 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$$

La solution est bornée (il s'agit d'un OH). La position d'équilibre est donc stable.

- Stabilité de $\theta_{eq} = \pi$:

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \sin(\pi + \varepsilon) = 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} - \omega_0^2 \varepsilon = 0$$

La solution diverge. La position d'équilibre est donc instable.



Conclusion :

La position d'équilibre d'un aimant (comme une boussole) est l'axe $S \rightarrow N$ aligné avec le champ magnétique. Il oscille autour de sa position d'équilibre. Si on prend en compte des frottements, il va converger vers sa position d'équilibre.

III.2 - Cas d'un champ tournant

Objectif : si on arrive à créer un champ tournant, un aimant va tourner avec le champ (car il veut toujours s'aligner le long du champ). On aura donc créé un moteur électrique.

On place deux bobines identiques à 90° l'une de l'autre. La bobine 1 est parcourue par un courant $i_1 = i_0 \cos(\omega t)$ et la bobine 2 par un courant $i_2 = i_0 \cos(\omega t - \pi/2) = i_0 \sin(\omega t)$. On suppose que les bobines sont infinies.

On a montré dans le chapitre précédent que :

$$\begin{cases} \vec{B}_1(O) = \mu_0 n i_1 \vec{u}_x = \mu_0 n i_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x \\ \vec{B}_2(O) = \mu_0 n i_2 \vec{u}_y = \mu_0 n i_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y = B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y \end{cases}$$

On en déduit le champ magnétique total :

$$\boxed{\vec{B}_{tot} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = B_0 (\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y) = B_0 \vec{u}_r}$$

Il s'agit bien d'un champ tournant à vitesse angulaire constante ω .

On place un aimant en O \Rightarrow il tourne à la même vitesse que le champ.

On a converti de l'énergie électrique en énergie mécanique : on a réalisé un **moteur synchrone**.

Remarques :

- Il s'agit exactement du principe de l'agitateur magnétique utilisé en chimie.
- En pratique, on utilise 3 bobines avec des courants déphasés de $\pi/3$.

