Électrocinétique | Chapitre 5 | Cours

E5 · Filtrage linéaire

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la notion de filtrage. Un signal (émis ou reçu) est rarement harmonique mais composé d'une multitude de fréquences. Toutes ces fréquences ne sont en revanche pas toute utile. Par exemple :

- *un récepteur à onde radio reçoit des signaux d'une multitude de sources différente mais l'utilisateur aimerait écouter une radio précise mais pas toute en même temps ;*
- *un microphone qui enregistre quelqu'un parler n'a pas besoin d'enregistrer les bruit environnant.*

L'objectif du filtrage est d'arriver à jouer sur le contenu spectral d'un signal : atténuer certaines fréquences, en amplifier d'autres, etc.

I - Filtre linéaire

I.1 - Fonction de transfert

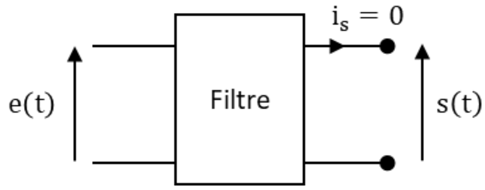
Définition :

Un **filtre** est un quadripôle qui modifie le contenu spectral d'un signal d'entrée (fréquences, amplitudes et/ou phases). Un filtre est dit **linéaire** s'il ne modifie pas les valeurs des fréquences. Il est réalisé à l'aide de dipôles linéaire (résistance, condensateur, bobine).

L'apparition de nouvelles fréquences est caractéristique d'effets **non linéaire**. Exemple de dipôle non linéaire : une diode.

Important :

L'étude d'un filtre se fait toujours sur une impédance de sortie infinie. Aucun courant ne sort du filtre.



Soit $e(t)$ un signal harmonique. On utilise la représentation complexe.

$e(\omega,t) = E_m \cos(\omega t) \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\underline{e}(\omega,t) = E_m\, e^{j\omega t}}$

$s(\omega,t) = S_m(\omega)\cdot\cos\big(\omega t + \phi(\omega)\big) \quad \longleftrightarrow \quad \boxed{\underline{s}(\omega,t) = \underline{S_m}(\omega)\cdot e^{j\omega t}}$ avec $\underline{S_m}(\omega) = S_m(\omega)\cdot e^{j\phi(\omega)}$

Définition :

On appelle **fonction de transfert** du filtre : $\boxed{\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(\omega,t)}{\underline{e}(\omega,t)} = \frac{S_m(\omega)}{E_m} e^{j\phi(\omega)}}$

I.2 - Diagramme de Bode

On appelle **gain** du filtre la norme de la fonction de transfert : $\boxed{G(\omega) = \left|\underline{H}(\omega)\right| = \frac{S_m(\omega)}{E_m}}$

On appelle **gain en décibel** la grandeur : $\boxed{G_{dB}(\omega) = 20\log\big(\left|\underline{H}(\omega)\right|\big)}$

Lien entre G_{dB} et le gain G :

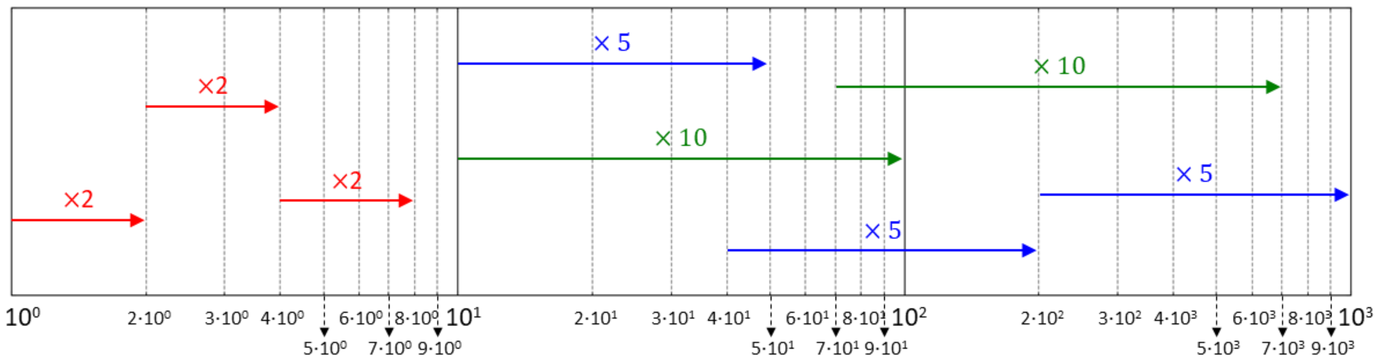
$G = \dfrac{S_m}{E_m} = 10^{G_{dB}/20}$	1	10	$\dfrac{1}{10}$	$\dfrac{1}{100}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$G_{dB} = 20\log(G)$	$0\ dB$	$20\ dB$	$-20\ dB$	$-40\ dB$	$\simeq -3\ dB$

Le gain renseigne sur l'amplification du signal. Si $G > 1 \Leftrightarrow G_{dB} > 0$, alors le filtre amplifie le signal. Si $G < 1 \Leftrightarrow G_{dB} < 0$, alors le filtre atténue le signal.

L'argument de la fonction de transfert correspond au déphasage induit par le filtre : $\boxed{\phi(\omega) = \mathrm{Arg}\left(\underline{H}(\omega)\right)}$

On appelle diagramme de Bode en amplitude et en phase les graphes $G_{dB}(\omega)$ et $\phi(\omega)$, tracé en échelle log.

<u>Remarque</u> : lecture d'un diagramme en échelle log.



Un saut de $\times$ 10 s'appelle **une décade**.

Si graphiquement ω_0 est au milieu de ω_1 et ω_2, alors $\omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}$.

I.3 - Types de filtre

Il existe différents types de filtre.

- **Passe-bas** : laisse passer les BF ($\underline{s} \neq 0$) et coupe les HF ($\underline{s} = 0$) ;
- **Passe-haut** : laisse passer les HF et coupe les BF ;
- **Passe-bande** : coupe les BF et HF et laisse passer une gamme de fréquence autour de ω_0 ;
- **Coupe-bande** : comportement inverse.

La fonction de transfert peut toujours se mettre sous la forme suivante :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{P}(\omega)}{\underline{N}(\omega)}$$

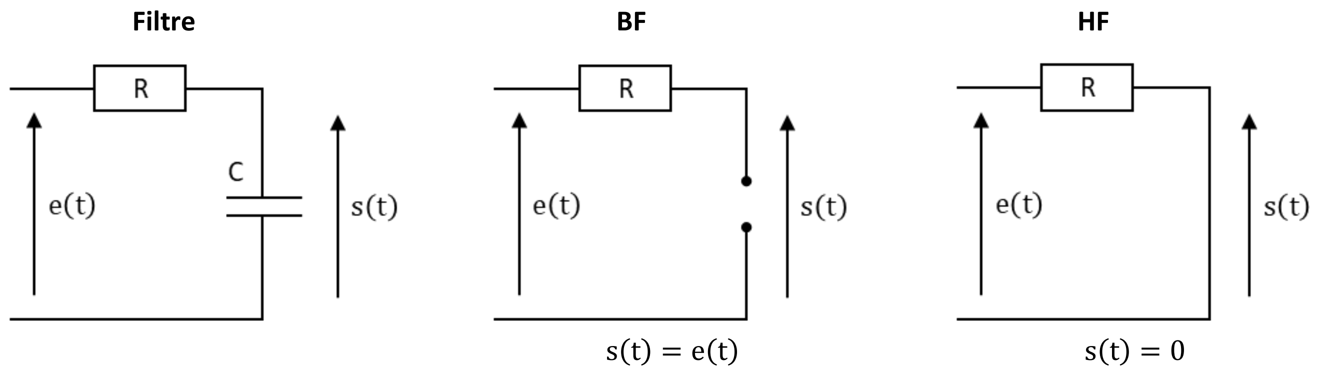
Où P et N sont des polynômes en ω. On appelle **ordre du filtre** le degré du polynôme N.

II - Exemples de filtres électriques

II.1 - Passe-bas d'ordre 1

a) Comportement BF et HF

Exemple du filtre RC.



Ce filtre laisse passer les BF et coupe les HF. C'est donc un **filtre passe-bas**.

b) Fonction de transfert

Pont diviseur de tension.

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C}}\,\underline{e} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + jx}\,\underline{e} \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jx}}$$

C'est un **filtre d'ordre 1**.

c) Étude de la fonction de transfert

Méthode :

Pour tracer un diagramme de Bode, il faut déterminer :

- Les asymptotes en BF et HF ;
- La valeur de la fonction de transfert là où se croisent les asymptotes.

- **Comportement BF : $x \ll 1$**

$$\underline{H} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) \sim 0 \\ \phi \sim 0 \end{cases}$$

- **Comportement HF : $x \gg 1$**

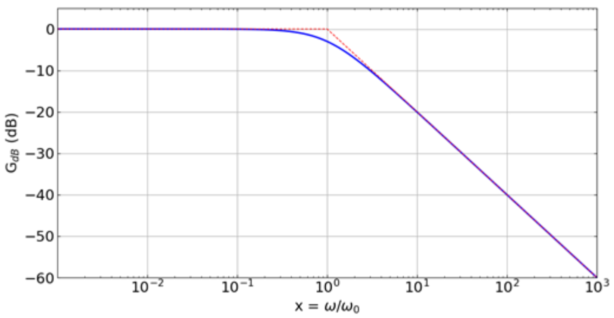
$$\underline{H} \sim \frac{1}{jx} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} \sim 20\log\left(\frac{1}{x}\right) \sim -20\log(x) \quad \leftarrow \text{droite de pente } -20\ dB/décade \\ \phi \sim -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

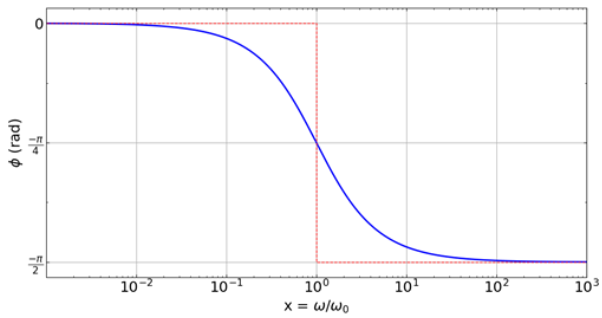
Les deux asymptotes se croisent en $x = 1$.

- **Fonction de transfert en $x = 1$**

$$\underline{H}(x = 1) = \frac{1}{1 + j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \simeq -3\ dB \\ \phi = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Diagramme de Bode :





Rappel :

On appelle **pulsation de coupure** à $-3\ dB$ la ou les pulsations ω_c tel que :

$$\boxed{G(\omega_c) = |\underline{H}(\omega_c)| = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{G_{dB}(\omega_c) = 20\log\left(\frac{G_{max}}{\sqrt{2}}\right) = 20\log(G_{max}) + 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = G_{dB,max} - 3\ dB}$$

On appelle **bande passante** l'intervalle de fréquence tel que :

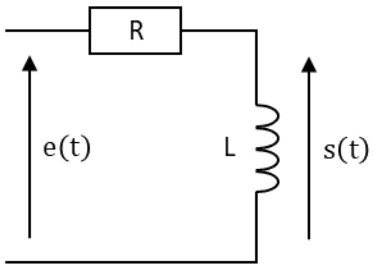
$$\boxed{G(\omega) \geq \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{G_{dB}(\omega) \geq G_{dB,max} - 3\ dB}$$

II.2 - Passe-haut d'ordre 1

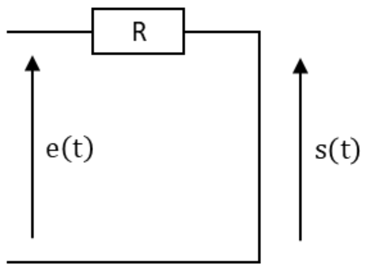
a) Comportement BF et HF

Exemple du filtre RL.

Filtre

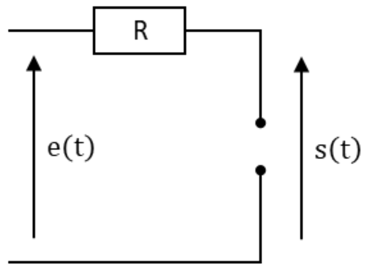


BF



s(t) = 0

HF



s(t) = e(t)

Ce filtre laisse passer les HF et coupe les BF. C'est donc un **filtre passe-haut**.

b) Fonction de transfert

Pont diviseur de tension.

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L}}\,\underline{e} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}\,\underline{e} = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}}\,\underline{e} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}\,\underline{e} = \frac{jx}{1 + jx}\,\underline{e} \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \frac{R}{L} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jx}{1 + jx}}$$

C'est un **filtre d'ordre 1**.

c) Étude de la fonction de transfert

Même méthode.

- **Comportement BF : $x \ll 1$**

$$\underline{H} \sim jx \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} \sim 20\log(x) & \leftarrow \text{droite de pente } +20\ dB/décade \\ \phi \sim +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

- **Comportement HF : $x \gg 1$**

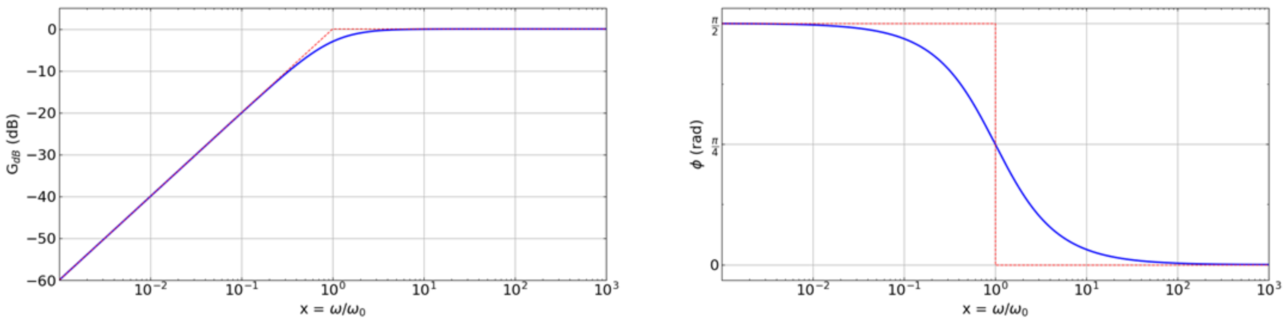
$$\underline{H} \sim \frac{jx}{jx} = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} \sim 0 \\ \phi \sim 0 \end{cases}$$

Les deux asymptotes se croisent en $x = 1$.

- **Fonction de transfert en $x = 1$**

$$\underline{H}(x = 1) = \frac{j}{1 + j} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = 20\log\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -10\log(2) \simeq -3\ dB \\ \phi = +\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

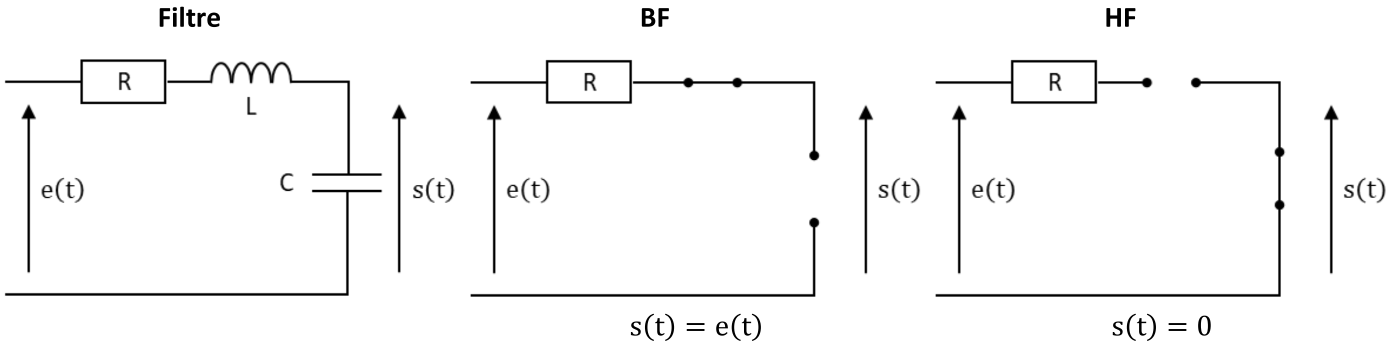
<u>Diagramme de Bode</u> :



II.3 - Passe-bas d'ordre 2

a) Comportement BF et HF

Exemple du filtre RLC avec sortie sur u_c.



Ce filtre laisse passer les BF et coupe les HF. C'est donc un **filtre passe-bas**.

b) Fonction de transfert

Pont diviseur de tension.

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_L} + \underline{Z_C}}\,\underline{e} = \frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C}\,\underline{e} = \frac{1}{1 - \omega^2 CL + j\omega RC}\,\underline{e}$$

On pose :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$$

C'est bien un **filtre d'ordre 2**.

c) Étude de la fonction de transfert

On a :

- **Comportement BF : $x \ll 1$**

$$\underline{H} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} \sim 0 \\ \phi \sim 0 \end{cases}$$

- **Comportement HF : $x \gg 1$**

$$\underline{H} \sim \frac{1}{-x^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} \sim 20\log\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim -40\log(x) \\ \phi \sim -\pi \end{cases}$$ ← droite de pente $-40\ dB/décade$

Les deux asymptotes se croisent en $x = 1$.

- **Fonction de transfert en $x = 1$**

$$\underline{H}(x = 1) = -jQ \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = 20\log(Q) \\ \phi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Le gain dépend de la valeur de Q. Étudions cette résonance.

d) Étude de la résonance

Le gain vaut :

$$G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}$$

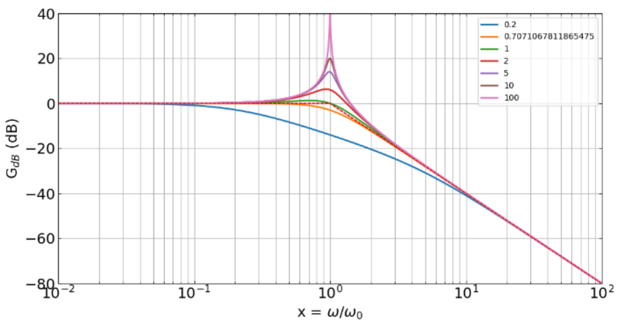
Le gain est maximal lorsque $g(x)$ est minimal.

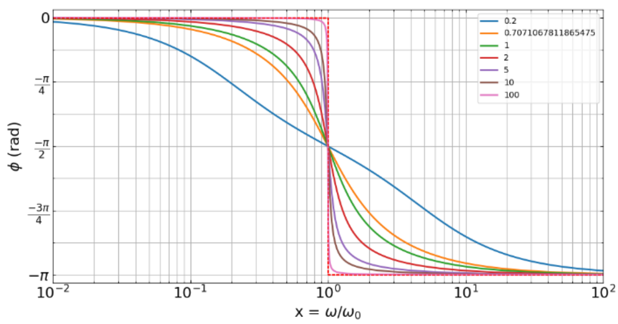
$$\frac{dg}{dx} = 2(-2x)(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x\left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{res} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

La résonance existe si et seulement si : $\boxed{Q > 1/\sqrt{2}}$.

Remarque : On a toujours $x_{res} < 1$, mais $x_{res} \to 1$ lorsque $Q \gg 1/\sqrt{2}$.

Diagramme de Bode :

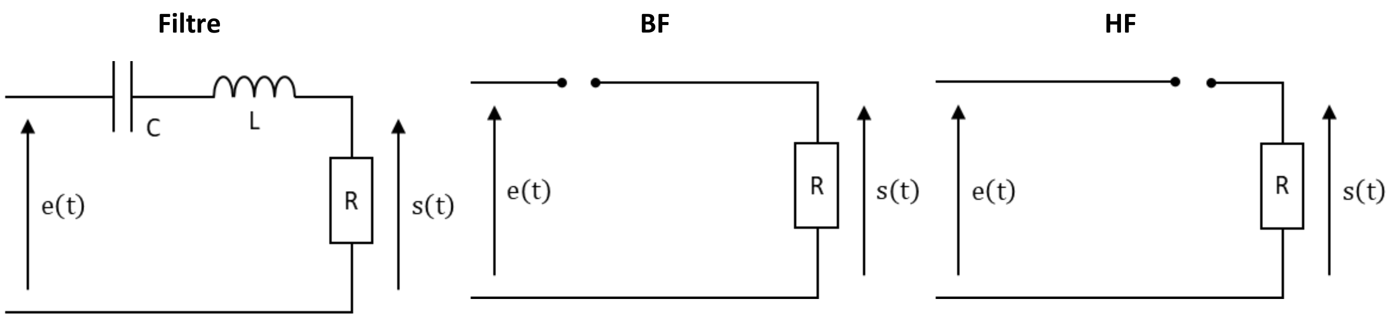




II.4 - Passe-bande d'ordre 2

a) Comportement BF et HF

Exemple du filtre RLC avec sortie sur u_R.



$s(t) = 0$ $\qquad$ $s(t) = 0$

Ce filtre laisse coupe les BF et HF. C'est donc un **filtre passe-bande**.

b) Fonction de transfert

Pont diviseur de tension.

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_L} + \underline{Z_R}}\,\underline{e} = \frac{R}{1/j\omega C + j\omega L + R}\,\underline{e} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)}\,\underline{e}$$

On pose :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j\,Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}}$$

Remarque :

On a :

$$\underline{H}(x) = \frac{x}{x + j\,Q(x^2 - 1)}$$

C'est bien un **filtre d'ordre 2**.

c) Étude de la fonction de transfert

On a :

- **Comportement BF : $x \ll 1$**

$$\underline{H} \sim \frac{1}{-\frac{jQ}{x}} = \frac{jx}{Q} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} \sim 20\log\left(\frac{x}{Q}\right) = -20\log(Q) + 20\log(x) & \leftarrow \text{droite de pente } +20\ dB/décade \\ \phi \sim +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- **Comportement HF : $x \gg 1$**

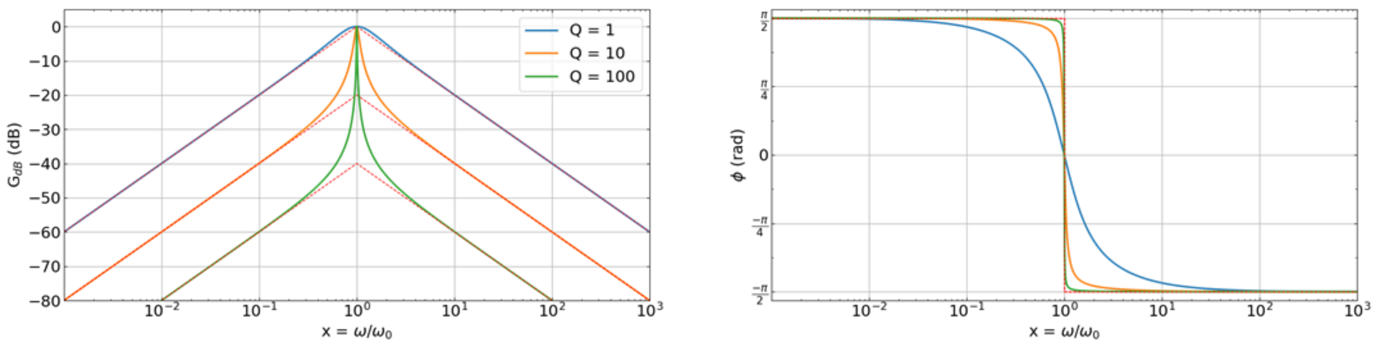
$$\underline{H} \sim \frac{1}{jQx} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} \sim 20\log\left(\frac{1}{Qx}\right) = -20\log(Q) - 20\log(x) & \leftarrow \text{droite de pente } -20\ dB/décade \\ \phi \sim -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Les deux asymptotes se croisent en $x = 1$ et $G_{dB} = -20\log(Q)$.

- **Fonction de transfert en $x = 1$**

$$\underline{H}(x = 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} G_{dB} = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Diagramme de Bode :



Remarque : la détermination des pulsations de coupures et de la BP a été vue au chapitre E4.

$$x_{res} = 1 \qquad \text{et} \qquad BP = \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

III - Action d'un filtre sur un signal

III.1 - Cas d'un signal harmonique

Rappel :

Signaux :

$$e(t) = E_m\cos(\omega t) \quad \leftrightarrow \quad \underline{e}(t) = E_m\, e^{j\omega t}$$
$$s(t) = S_m(\omega)\cdot\cos\big(\omega t + \phi(\omega)\big) \quad \leftrightarrow \quad \underline{s}(t) = S_m(\omega)\cdot e^{j\phi(\omega)}\, e^{j\omega t}$$

Fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{S_m(\omega)}{E_m}\, e^{j\phi(\omega)}$$

On en déduit le signal de sortie :

$$\boxed{s(t) = \underbrace{S_m(\omega)}_{\substack{= E_m \cdot |\underline{H}(\omega)| \\ = E_m \cdot 10^{G_{dB}(\omega)/20}}} \cdot \cos\left(\omega t + \underbrace{\phi(\omega)}_{= \arg\left(\underline{H}(\omega)\right)}\right)}$$

Conclusion : connaître $\underline{H}(\omega)$, c'est connaître l'amplitude et la phase du signal de sortie.

Exemple :

Soit le filtre passe-bas d'ordre 1 : $\underline{H}(x) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$ avec $\omega_0 = 10^2\ rad \cdot s^{-1}$.

Hypothèse : $e(t) = 2\cos(\omega_n t)$

Si : $\omega_0 = 10^{-\infty} = 0\ rad \cdot s^{-1}$ (signal continu) Alors : $s(t) = 2 \cdot 10^{0/20} \cos(0) = 2$

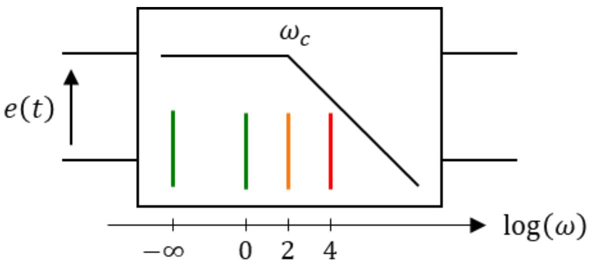
Si : $\omega_1 = 10^0 = 1\ rad \cdot s^{-1}$ Alors : $s(t) = 2 \cdot 10^{0/20} \cos(\omega_1 t + 0) = 2\cos(\omega_1 t)$

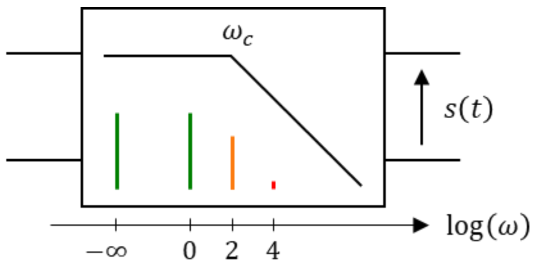
Si : $\omega_2 = 10^2\ rad \cdot s^{-1}$ Alors : $s(t) = 2 \cdot 10^{-3/20} \cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\omega_2 t - \frac{\pi}{4}\right)$

Si : $\omega_3 = 10^4\ rad \cdot s^{-1}$ Alors : $s(t) = 2 \cdot 10^{-40/20} \cos\left(\omega_3 t - \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}02\sin(\omega_3 t)$

Représentation schématique :

On superpose sur un même graphique la fonction de transfert et le spectre en amplitude.





Remarque :

Pour se faire une idée « rapide » de l'effet d'un filtre, on peut considérer en première approximation que toutes les fréquences qui sont dans la BP sont conservées, et que celles hors de la BP sont coupées.

III.2 - Cas d'un signal périodique

N'importe quel signal périodique peut s'écrire comme la somme :

$$e(t) = \sum_n E_n(\omega_n) \cdot cos\left(\omega_n t + \phi_n(\omega_n)\right)$$

Pour connaître le signal de sortie, on applique le résultat précédent à chacun pulsation ω_n (car le filtre est linéaire).

$$s(t) = \sum_n \underbrace{S_n(\omega_n)}_{\substack{= E_m \cdot |\underline{H}(\omega_n)| \\ = E_m \cdot 10^{G_{dB}(\omega_n)/20}}} \cdot \cos\left(\omega t + \underbrace{\phi(\omega_n)}_{= \arg\left(\underline{H}(\omega_n)\right)}\right)$$

Application : avec le même filtre passe-bas.

On suppose que : $e(t) = 2 + 2\cos(1 \cdot t) + 2\cos(10^2 \cdot t) + 2\cos(10^4 \cdot t)$

Alors, $s(t) = 2 + 2\cos(1 \cdot t) + \sqrt{2}\cos\left(10^2 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right) + \underbrace{0{,}02\sin(10^4 \cdot t)}_{\text{à négliger}}$

III.3 - Choisir un filtre adapté à un cahier des charges

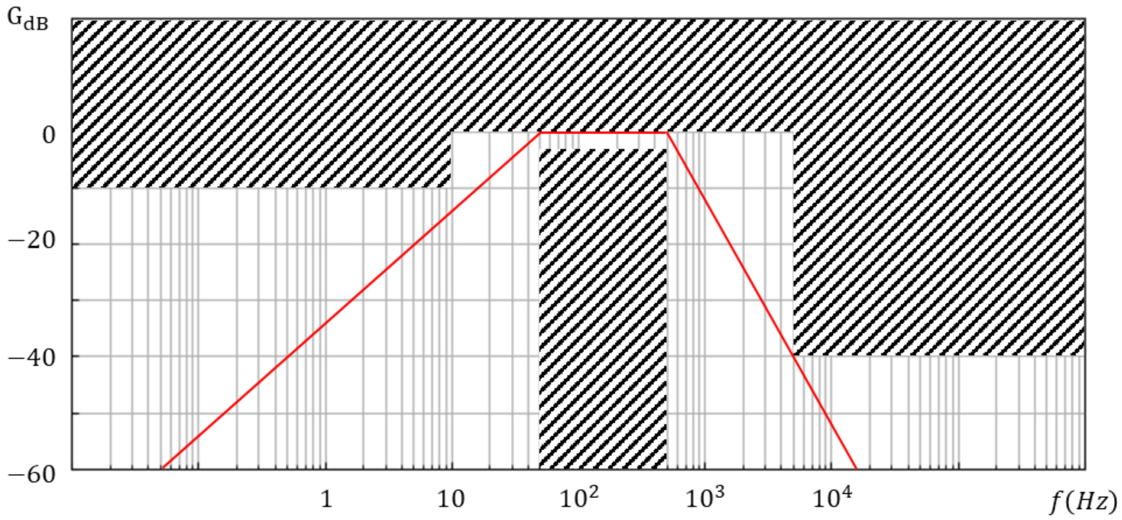
Un cahier des charges est une liste d'instructions à respecter.

Exemple :

Dans le but d'éliminer les bruits environnent et de garder uniquement la voix de l'utilisateur sans déformation, la fonction de transfert d'un microphone de téléphone portable doit :

- Ne pas avoir de résonance aigüe ;
- Avoir un gain compris entre 0 et -3 dB pour les fréquences : $50\ \text{Hz} < f < 500\ \text{Hz}$;
- Atténuer à au moins -10 dB les signaux de fréquences $f < 10\ \text{Hz}$;
- Atténuer à au moins -40 dB les signaux de fréquences $f > 5\ \text{kHz}$.

1) Sur le graphique ci-dessous, rayer les zones dans lesquelles le gain G_{dB} ne doit pas se trouver, afin de respecter le cahier des charges.
2) Tracer un diagramme de Bode asymptotique satisfaisant le cahier des charges.
3) Proposer un filtre ou une association de filtres possédant un tel diagramme de Bode.



Pour satisfaire le cahier des charges, il faut associer :

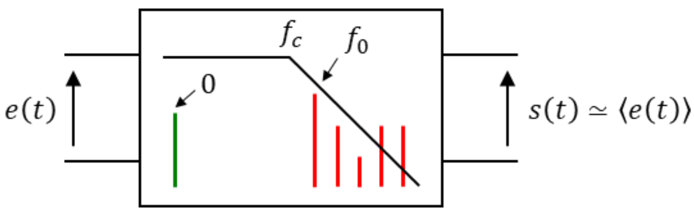
- Un filtre passe-haut d'ordre 1 (pente de $+20\ dB/dec$), de fréquence propre $f_{01} = 50\ Hz$;
- Un filtre passe-bas d'ordre 2 (pente de $-40\ dB/dec$), de fréquence propre $f_{02} = 500\ Hz$ et de facteur de qualité $Q \sim 1/\sqrt{2}$ (pas de résonance).

IV - Réaliser une opération linéaire à l'aide d'un filtre

IV.1 - Filtre moyenneur

Propriété :

Tout filtre passe-bas dont la fréquence de coupure $f_c \ll f_0$ la fréquence fondamentale d'un signal d'entrée, permet de récupérer en sortie la valeur moyenne de ce signal.



Application :

Soit un signal créneau de période T avec $\boxed{\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 10^3\ rad \cdot s^{-1}}$ et de valeur moyenne $\boxed{1\ V}$. On envoie ce signal dans le circuit RC passe-bas d'ordre 1 de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_c}} \qquad \text{avec :} \qquad \boxed{\omega_c = 10\ rad \cdot s^{-1}}$$

Le signal de sortie vaut : $\quad s(t) \simeq 1$

IV.2 - Filtre intégrateur

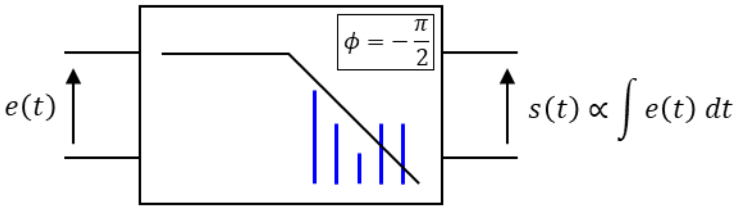
Un filtre intégrateur est un filtre dont la fonction de transfert vaut : $\underline{H}(\omega) \propto \frac{1}{j\omega}$. En effet :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \propto \frac{1}{j\omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{s}(t) \propto \frac{\underline{e}(t)}{j\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{s(t) \propto \int e(t)\, dt}$$

Graphiquement, cela signifie que G_{dB} est une droite de pente $-20\ dB/dec$ et que $\phi = -\pi/2$.

Propriété :

Soit un signal $e(t)$ d'entrée dont l'ensemble du spectre est contenu une droite de pente $-20\ dB/dec$. Alors le signal de sortie est proportionnel à l'intégrale du signal d'entrée.



Intégrateur

Application :

Soit un signal créneau de période T avec $\boxed{\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 10^3\ rad \cdot s^{-1}}$ et de valeur moyenne nulle. On envoie ce signal dans le circuit RC passe-bas d'ordre 1 de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \qquad \text{avec :} \qquad \boxed{\omega_c = 10\, rad \cdot s^{-1}}$$

Signal de sortie : un signal triangle de période T et atténué (car $G_{dB} < 0$).

IV.3 - Filtre dérivateur

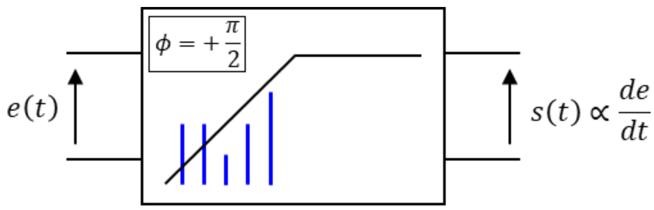
Un filtre dérivateur est un filtre dont la fonction de transfert vaut : $\underline{H}(\omega) \propto j\omega$. En effet :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} \propto j\omega \quad \Rightarrow \quad \underline{s}(t) \propto j\omega\, \underline{e}(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{s(t) \propto \frac{de}{dt}}$$

Graphiquement, cela signifie que G_{dB} est une droite de pente $+20\ dB/dec$ et que $\phi = +\pi/2$.

Propriété :

Soit un signal $e(t)$ d'entrée dont l'ensemble du spectre est contenu une droite de pente $+20\ dB/dec$. Alors le signal de sortie est proportionnel à la dérivée du signal d'entrée.



Dérivateur

Application :

Soit un signal triangle de période T avec $\boxed{\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = 10^2\ rad \cdot s^{-1}}$ et de valeur moyenne nulle. On envoie ce signal dans le circuit RL passe-haut d'ordre 1 de fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{j\omega/\omega_c}{1 + j\omega/\omega_c} \qquad \text{avec :} \qquad \boxed{\omega_c = 10^5\, rad \cdot s^{-1}}$$

Signal de sortie : un signal créneau de période T et atténué (car $G_{dB} < 0$).

V - Association de filtres

V.1 - Association de fonctions de transfert

<u>Objectif</u> : associer plusieurs filtres élémentaires afin d'obtenir un filtre plus spécifique.

Soit une fonction de transfert égale au produit de fonctions de transfert « élémentaires » :

$$\underline{\mathrm{H}}(\omega) = \prod_i \underline{\mathrm{H}}_i(\omega)$$

Dans ce cas :

$$\mathrm{G_{dB}} = 20\log(|\underline{\mathrm{H}}(\omega)|) = 20\ \log\left(\prod_i |\underline{\mathrm{H}}_i|(\omega)\right) = \sum_i 20\ \log\left(|\underline{\mathrm{H}}_i|(\omega)\right) = \sum_i \mathrm{G_{dB,i}}$$

$$\phi = \arg\left(\underline{\mathrm{H}}(\omega)\right) = \arg\left(\prod_i |\underline{\mathrm{H}}_i|(\omega)\right) = \sum_i \arg\left(|\underline{\mathrm{H}}_i|(\omega)\right) = \sum_i \phi_\mathrm{i}$$

Le diagramme de Bode (amplitude et phase) du filtre global et alors égal à la somme des diagrammes de Bode des filtres élémentaires.

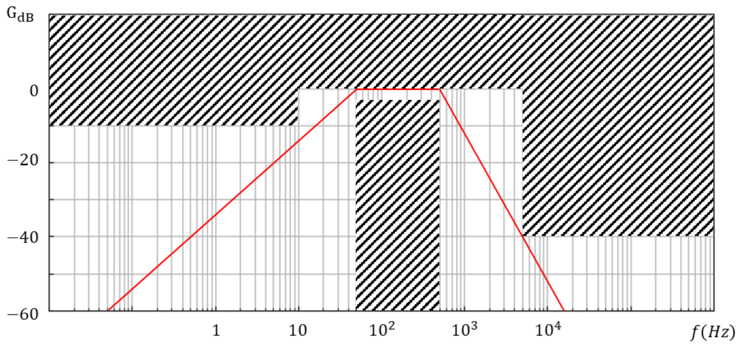
V.2 - Application (retour sur l'exemple du III.3)

a) Objectif

Essayons de construire le filtre de la partie III.3.

<u>Rappel</u> : Pour satisfaire le cahier des charges, il faut associer :

- Un filtre passe-haut d'ordre 1 (pente de $+20\ \mathrm{dB/dec}$), de fréquence propre $f_{01} = 50\ \mathrm{Hz}$;
- Un filtre passe-bas d'ordre 2 (pente de $-40\ \mathrm{dB/dec}$), de fréquence propre $f_{02} = 500\ \mathrm{Hz}$ et de facteur de qualité $Q \sim 1/\sqrt{2}$ (pas de résonance).



On souhaite donc réaliser la fonction de transfert :

$$\underline{H}(\omega) = \underbrace{\underline{H_1}(\omega)}_{\text{Passe-haut RL}} \times \underbrace{\underline{H_2}(\omega)}_{\text{Passe-bas RLC}} = \frac{j\dfrac{\omega}{\omega_{01}}}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_{01}}} \times \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_{02}}\right)^2 + \dfrac{j}{Q}\dfrac{\omega}{\omega_{02}}}$$

On choisit les valeurs :

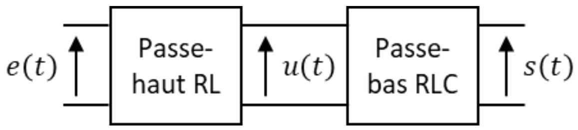
$$\mathrm{R_1} = 630\ \Omega \qquad \mathrm{L_1} = 2{,}0\ \mathrm{H} \qquad \mathrm{R_2} = 22\ \Omega \qquad \mathrm{L_2} = 5{,}0\ \mathrm{mH} \qquad \mathrm{C_2} = 20\ \mu\mathrm{F}$$

De sorte à avoir :

$$\boxed{f_{01} = \frac{\omega_{01}}{2\pi} = \frac{\mathrm{R_1}}{2\pi \mathrm{L_1}} = 50\ \mathrm{Hz}} \qquad \boxed{f_{02} = \frac{\omega_{02}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mathrm{L_2 C_2}}} = 500\ \mathrm{Hz}} \qquad \boxed{\mathrm{Q} = \frac{1}{\mathrm{R_2}}\sqrt{\frac{\mathrm{L_2}}{\mathrm{C_2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

b) Approche naïve

Tentons, de mettre en cascade les deux filtres. On obtient donc le circuit suivant :



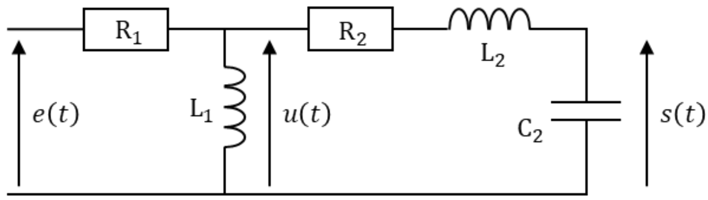
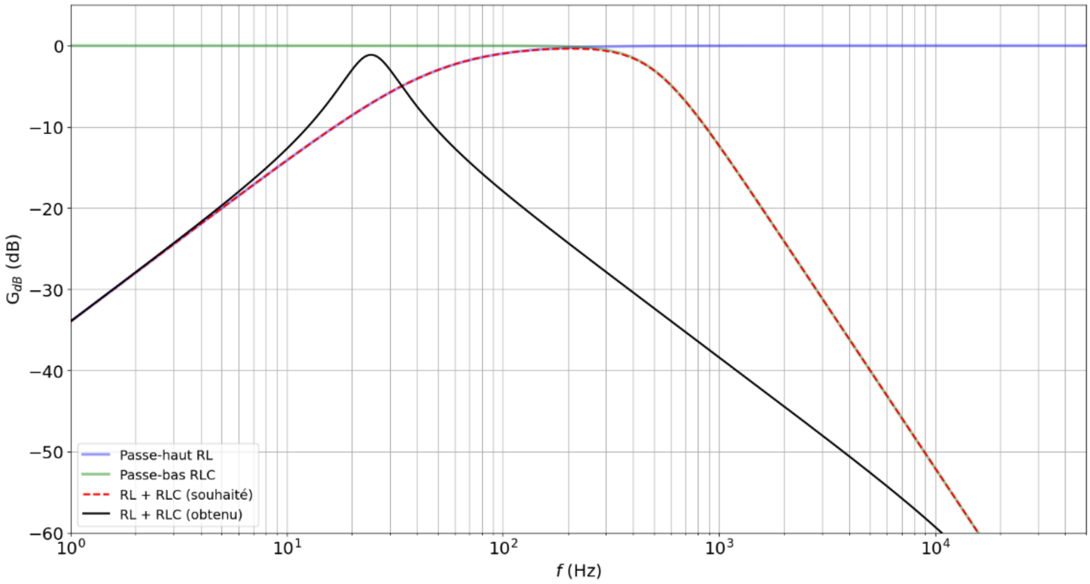


Diagramme de Bode obtenu :



<u>Problème</u> : on n'obtient pas la bonne fonction de transfert.

<u>RAPPEL</u> ! L'étude d'un filtre se fait toujours sur une impédance de sortie infinie. Ici, le courant de sortie du premier filtre n'est pas nul car l'impédance du second filtre n'est pas infinie.

c) Bonne gestion des impédances

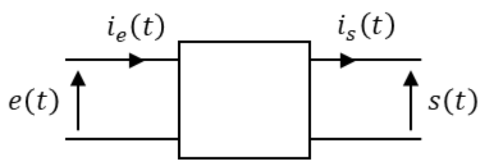
<u>Définition</u> :

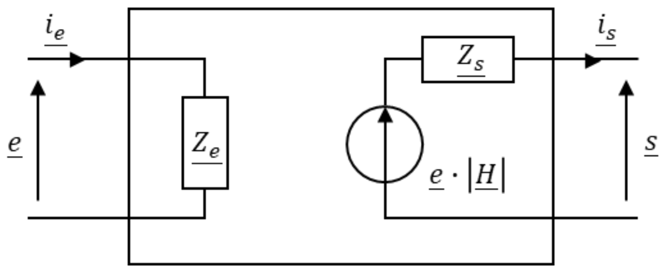
Soit le quadripôle ci-dessous (*gauche*). On appelle **impédance d'entrée** $\underline{Z_e}$ et **impédance de sortie** $\underline{Z_s}$ les grandeurs :

$\boxed{\underline{Z_e}(\omega) = \frac{\underline{e}}{\underline{i_e}}}$ et $\boxed{\underline{Z_s}(\omega) = -\frac{\underline{s}}{\underline{i_s}}}$ en posant $e = 0$ (ie. remplacer le générateur par un fil)

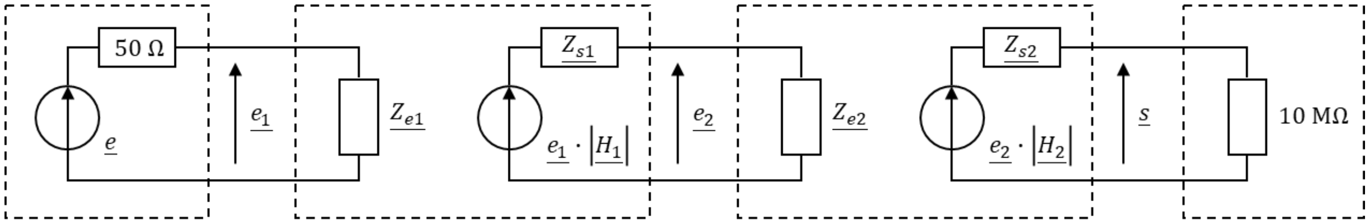
<u>Propriété</u> :

Le quadripôle est alors équivalant au quadripôle ci-dessous (*droite*).





Le schéma équivalent complet du montage réalisé est donc :



Propriété :

Lors d'une mise en cascade de plusieurs filtres, pour assurer leur bon fonctionnement, il faut s'assurer que, pour chaque filtre :

- **L'impédance d'entrée** soit **élevée** devant l'impédance de sortie du dispositif précédent ;
- **L'impédance de sortie** soit **faible** devant l'impédance d'entrée du dispositif suivant.

Dans notre cas, il faut s'assurer que, pour tout ω :

- $R_{GBF} = 50\ \Omega \ll \left|\underline{Z_{e,1}}(\omega)\right|$
- $\left|\underline{Z_{s,1}}(\omega)\right| \ll \left|\underline{Z_{e,2}}(\omega)\right|$
- $\left|\underline{Z_{s,2}}(\omega)\right| \ll R_{voltmètre} = 10\ \mathrm{M\Omega}$

Si ces conditions sont respectées, alors $\underline{\mathrm{H}_{tot}}(\omega) = \prod \underline{\mathrm{H}_i}(\omega)$. Dans le cas contraire, $\underline{\mathrm{H}_{tot}}(\omega) \neq \prod \underline{\mathrm{H}_i}(\omega)$.

Remarque pratique :

De manière générale, lorsque l'on construit un filtre, il faut veiller à avoir $\underline{Z_e}(\omega)$ le plus grand possible et $\underline{Z_s}(\omega)$ le plus faible possible, afin de garantir son bon fonctionnement leur de mises en cascade.

V.3 - Exercice : calcul des impédances d'entrée et de sortie du filtre RL

On alimente un filtre RL par un générateur idéal de fem e. On étudie le filtre à l'aide d'un voltmètre de résistance interne $R_V = 10\ \mathrm{M\Omega}$.

Impédance d'entrée

$$\boxed{\underline{Z_e} = \frac{\underline{e}}{\underline{i_e}} = R + \underline{Z_L} \parallel R_V = R + \left(\frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{R_V}\right)^{-1}}$$

Remarque : elle contient le filtre + tout ce qu'il y a après le filtre.

Impédance de sortie

$$\boxed{\underline{Z_s} = -\frac{\underline{s}}{\underline{i_s}} = -\mathrm{R} \parallel \underline{Z_L} = -\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}\right)^{-1}}$$

Remarque : remplacer le générateur par un fil.