E4 · Régime sinusoïdal forcé

Dans le chapitre précédent : régime transitoire d'un oscillateur amorti entre deux régimes stationnaires. Ici, on va s'intéresser au régime permanant dans le cas d'une excitation sinusoïdale ⇒ régime sinusoïdal.

I - Position du problème

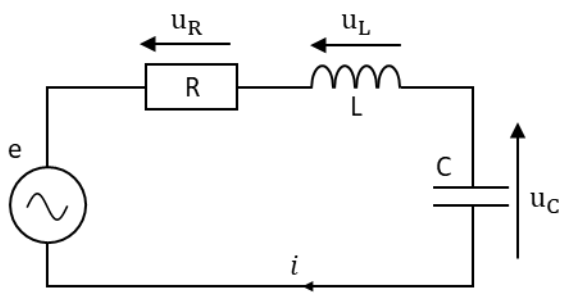
I.1 - Qu'est-ce qu'un RSF ?

Soit le circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale de la forme :

$$\boxed{\mathrm{e(t)} = \mathrm{E_m}\cos(\omega \mathrm{t})}$$

L'équation différentielle qui régit l'évolution de $u_c(t)$ est :

$$\boxed{\frac{d^2u_c}{dt^2} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2\, u_c(\mathrm{t}) = \omega_0^2\, \mathrm{e(t)} = \omega_0^2\, \mathrm{E_m}\cos(\omega \mathrm{t})}$$



La solution de cette ED est de la forme :

$$u_c(t) = u_{c,SEH}(t) + u_{c,SP}(t)$$

Dans le chapitre précédent, on a étudier la SEH. On a vu que $u_{c,SEH}(t \to +\infty) \to 0$ quelque soit le régime. Ainsi, **<u>en régime permanant</u>** (ie. après un temps $t \gg \tau$, le temps caractéristique du régime transitoire) :

$$\boxed{u_c(t) = u_{c,SP}(t)}$$

Dans le chapitre précédent, $\mathrm{e(t)} = E$ était constant, donc $u_{c,SP}(t)$ était également constant ⇒ on parle de **<u>régime stationnaire</u>**.

Dans ce chapitre, l'excitation est sinusoïdale, donc $u_{c,SP}(t)$ le sera également ⇒ on parle de **<u>régime sinusoïdal forcé</u>** (RSF).

$$\boxed{u_{c,SP}(\omega, t) = U_m(\omega)\cdot\cos\big(\omega t + \phi(\omega)\big)}$$

L'objectif est de déterminer l'amplitude $U_m(\omega)$ et la phase $\phi(\omega)$ en fonction de la pulsation excitatrice ω choisie.

I.2 - Représentation complexe

Puisque l'on étudie des signaux sinusoïdaux, on peut utiliser la notation complexe.

$$u_c(\omega, t) = U_m(\omega)\cdot\cos\big(\omega t + \phi(\omega)\big) \quad \Rightarrow \quad \underline{u_c} = U_m\,(\omega)\cdot e^{j(\omega t + \phi(\omega))} = U_m(\omega)e^{j\phi(\omega)}\cdot e^{j\omega t} = \underline{U_m}\,(\omega)\cdot e^{j\omega t}$$

Avec $\boxed{\underline{U_m}(\omega) = U_m(\omega)\, e^{j\phi(\omega)}}$ **l'amplitude complexe** du signal. L'objectif est donc de déterminer ce complexe.

<u>Remarque</u> : Le passage en notation complexe simplifie les calculs.

- Dérivée :

$$\frac{d\underline{u_c}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underline{U_m}\, e^{j\omega t}\right) = j\omega\, \underline{U_m}\, e^{j\omega t} = j\omega\, \underline{u_c}(t)$$

Dériver un signal complexe revient à multiplier ce signal par $j\omega$.

- Intégrale :

$$\int \underline{u_c}(t)\, dt = \int \underline{U_m}\, e^{j\omega t}\, dt = \frac{\underline{U_m}\, e^{j\omega t}}{j\omega} = \frac{\underline{u_c}(t)}{j\omega}$$

Intégrer un signal complexe revient à diviser ce signal par $j\omega$.

II - Impédance complexe

II.1 - Définition

Soit un dipôle en RSF. On note :

- La tension à ces bornes : $u = U_m \cos(\omega t + \phi_u) \quad \leftrightarrow \quad \underline{u} = U_m e^{j\phi_u}\, e^{j\omega t}$
- L'intensité qui la traverse : $i = I_m \cos(\omega t + \phi_i) \quad \leftrightarrow \quad \underline{i} = I_m e^{j\phi_i}\, e^{j\omega t}$

<u>Définition</u> :

On appelle **impédance** complexe $\underline{Z}$ la grandeur vérifiant la relation : $\boxed{\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}}$. On appelle **admittance** $\underline{Y}$ l'inverse de l'impédance : $\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}}$.

<u>Remarque</u> :

$$\underline{Z}(\omega) = \frac{\underline{u}(\omega, t)}{\underline{i}(\omega, t)} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\phi_u - \phi_i)}$$

$\underline{Z}(\omega)$ est un complexe de module $\frac{U_m}{I_m}$ et d'argument le déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$.

II.2 - Impédance des dipôles usuels

Déterminons l'impédance des dipôles usuels.

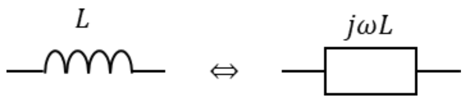
- <u>Résistance</u> :

$$u = Ri \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = \mathrm{R} \times \underline{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{Z_R} = \mathrm{R}}$$

En RSF, $u(t)$ et $i(t)$ sont en phase dans une résistance (car $\underline{Z_R} \in \mathbb{R}^+$).

- <u>Fil électrique</u> : équivalent à une résistance nulle : $\boxed{\underline{Z_{fil}} = 0}$
- <u>Circuit ouvert</u> : équivalent à une résistance infinie : $\boxed{\underline{Z_{circuit\ ouvert}} = +\infty}$
- <u>Bobine</u> :

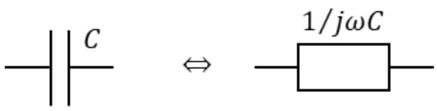
$$u = L\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}\underline{i}}{dt} = j\omega L \times \underline{i} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{Z_L} = j\omega L}$$



En RSF, $u(t)$ est en avance de phase de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à $i(t)$ dans une bobine (car $\underline{Z_L} \in \mathrm{i}\mathbb{R}^+$).

- <u>Condensateur</u> :

$$i = C\frac{du}{dt} \quad \Rightarrow \quad \underline{i} = C\frac{d\underline{u}}{dt} = j\omega C\, \underline{u} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = \frac{\underline{i}}{j\omega C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{Z_C} = \frac{1}{j\omega C}}$$



En RSF, $u(t)$ est en retard de phase de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à $i(t)$ dans une bobine (car $\underline{Z_L} \in \mathrm{i}\mathbb{R}^-$).

II.3 - Comportement BF et HF

Le comportement d'un dipôle en RSF dépend de ω. On appelle **basses fréquences** (BF) les fréquences telles que $\omega \to 0$ et **hautes fréquences** (HF) les fréquences telles que $\omega \to +\infty$.

En général, un circuit possède une certaine pulsation caractéristique ω_0. Les BF (respectivement HF) sont donc les fréquences telles que $\omega \ll \omega_0$ (respectivement $\omega \gg \omega_0$).

<u>Remarque</u> :

Un cosinus de fréquence nulle est une fonction constante :

$$u(\omega, t) = U_m(\omega) \cdot \cos\big(\omega t + \phi(\omega)\big) \quad \xrightarrow[\omega \to 0]{} \quad u = U_m(0) \cdot \cos\big(\phi(0)\big)$$

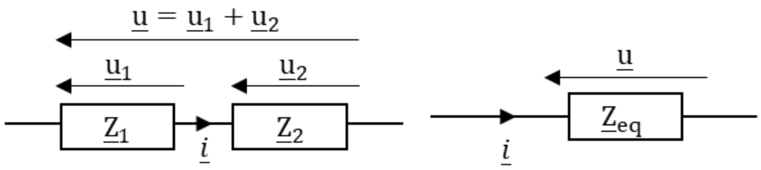
Ainsi : **basses fréquence** ⇔ **régime permanant**.

Dipôle	Impédance	BF ⇔ Régime stationnaire $\omega \ll \omega_0$	HF $\omega \gg \omega_0$
Résistance	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_R = R$	$\underline{Z}_R = R$
Condensateur	$\underline{Z}_C = \dfrac{1}{j\omega C}$	$\lvert\underline{Z}_C\rvert \to +\infty$ Interrupteur ouvert	$\lvert\underline{Z}_C\rvert \to 0$ Fil
Bobine	$\underline{Z}_L = j\omega L$	$\lvert\underline{Z}_L\rvert \to 0$ Fil	$\lvert\underline{Z}_L\rvert \to +\infty$ Interrupteur ouvert

Remarque : on retrouve bien comportement du condensateur et de la bobine en régime stationnaire.

II.4 - Associations d'impédances

- Association de N impédances en série :



Additivité des tensions :

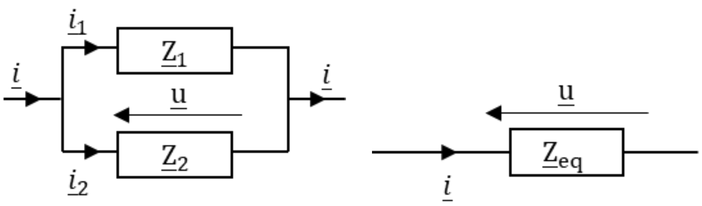
$$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{i} + \underline{Z}_2 \cdot \underline{i} = \left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2\right)\underline{i}$$

On a : $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$

Généralisation :

$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = \sum_{n=1}^{N} \underline{Z}_n}$$

- Association de N impédances en dérivation :



Loi des nœuds :

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 = \underline{Y}_1 \cdot \underline{u} + \underline{Y}_2 \cdot \underline{u} = \left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2\right)\underline{u}$$

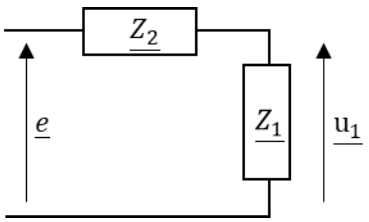
On a : $\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \Rightarrow \dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2}$

Généralisation :

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\underline{Z}_n}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{Y}_{eq} = \sum_{n=1}^{N} \underline{Y}_n}$$

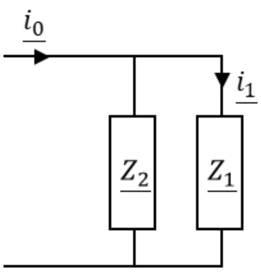
II.5 - Ponts diviseur

On retrouve les mêmes formules qu'avec des résistances :



- Pont diviseur de tension :

$$\boxed{\underline{u}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\,\underline{e}}$$



- Pont diviseur de courant :

$$\boxed{\underline{i}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\,\underline{i}_0 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\,\underline{i}_0}$$

III - Étude de l'intensité du circuit RLC en RSF

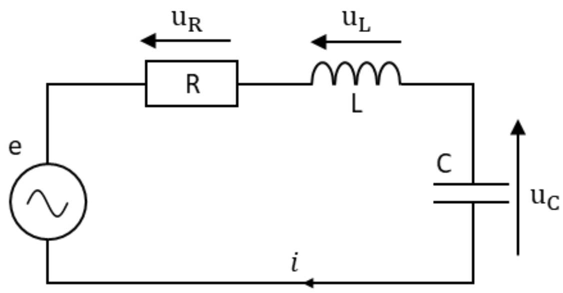
III.1 - Passage en notation complexe

Soit le circuit RLC série soumis à une tension sinusoïdale de la forme :

$$\boxed{\mathrm{e(t)} = E_{\mathrm{m}} \cos(\omega \mathrm{t})}$$

On souhaite étudier l'intensité :

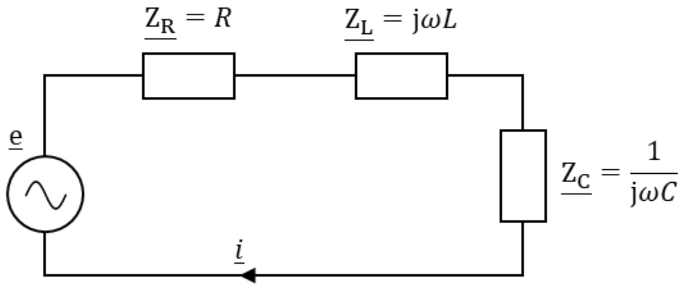
$$i(\omega, t) = I_m(\omega)\cos\big(\omega t + \phi(\omega)\big)$$



On associe à chaque signal réel un signal complexe :

$$\boxed{\underline{e}(t) = E_m e^{j\omega t}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\underline{i}(t) = I_m e^{j(\omega t+\phi)} = I_m e^{j\phi} e^{j\omega t} = \underline{I_m} e^{j\omega t}}$$

Circuit équivalent avec des impédances :



Loi des mailles :

$$\underline{e} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{i} \quad \Rightarrow \quad E_m e^{j\omega t} = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)\underline{I_m} e^{j\omega t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{I_m}(\omega) = \frac{E_m}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}}}$$

<u>Remarque</u> : à ce stade, il est normal que le temps disparaisse de l'équation. Pour rappel, on cherche à étudier le comportement en fréquence : $I_m(\omega)$ et $\phi(\omega)$.

Mettons $\underline{I_m}$ sous sa forme canonique (à ne pas connaitre) :

$$\boxed{\underline{I_m}(x) = \frac{I_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}} \quad avec : \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ la } \textbf{pulsation réduite}$$

On a :

$$\underline{I_m}(\omega) = \frac{E_m/R}{1 + j\left(\omega\dfrac{L}{R} - \dfrac{1}{\omega RC}\right)} = \frac{I_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec :} \quad \boxed{I_0 = \frac{E_m}{R}} \quad \frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

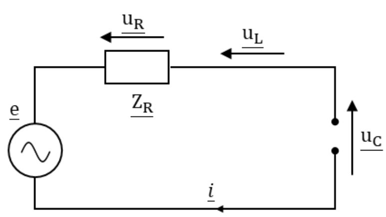
On a donc :

$$Q = \sqrt{Q\omega_0 \times \frac{Q}{\omega_0}} = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}} = \boxed{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} \qquad \text{et} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{Q\omega_0}{Q/\omega_0}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

III.2 - Comportement BF et HF

- <u>Comportement BF</u> :

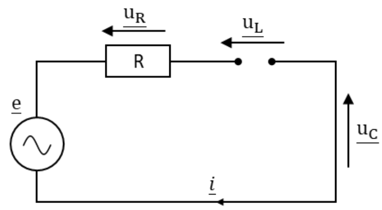
$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0 \\ \Leftrightarrow \\ x \ll 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underline{I_m}(x) \sim \frac{I_0}{-\dfrac{jQ}{x}} = jx\frac{I_0}{Q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} I_m \to 0 \\ \phi \to +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}}$$



En BF, condensateur ⇔ circuit ouvert, donc $I_m \to 0$.

- Comportement HF :

$$\begin{cases} \omega \gg \omega_0 \\ \Leftrightarrow \\ x \gg 1 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{I_m}(x) \sim \frac{I_0}{jQx} = -j\frac{I_0}{Qx} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} I_m \to 0 \\ \phi \to -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}}$$



En BF, bobine ⇔ circuit ouvert, donc $I_m \to 0$.

III.3 - Solution complète

Déterminons $I_m(x)$ et $\phi(x)$.

- Amplitude :

$$\boxed{I_m(x) = \left|\underline{I_m}(x)\right| = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{g(x)}}} \quad \text{avec :} \quad \boxed{g(x) = 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

- Phase :

On cherche à mettre $\underline{I_m}(x)$ sous la forme :

$$\underline{I_m} = I_m e^{j\phi} = I_m(\cos(\phi) + j\sin(\phi))$$

On a :

$$\underline{I_m}(x) = \frac{I_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{I_0}{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \times \left(1 - jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) = \frac{I_0}{\sqrt{g(x)}}\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{g(x)}}}_{\cos(\phi)} + j\underbrace{\frac{-Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{g(x)}}}_{\sin(\phi)}\right)$$

On en déduit :

$$\boxed{\tan(\phi) = -Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

III.4 - Phénomène de résonance

Définition :

Une **résonance** correspond à un maximum de l'amplitude d'une grandeur. Rappel : l'amplitude est une fonction de ω, pas de t.

Exemple : $\quad i(\omega, t) = I_m(\omega) \cdot \cos\big(\omega t + \phi(\omega)\big)$

Résonance → pulsation qui maximise $I_m(\omega)$.

Application au circuit RLC :

Cherchons un maximum de $I_m(x) = \frac{I_0}{\sqrt{g(x)}}$ ⇔ Cherchons un minimum de $g(x) = 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$.

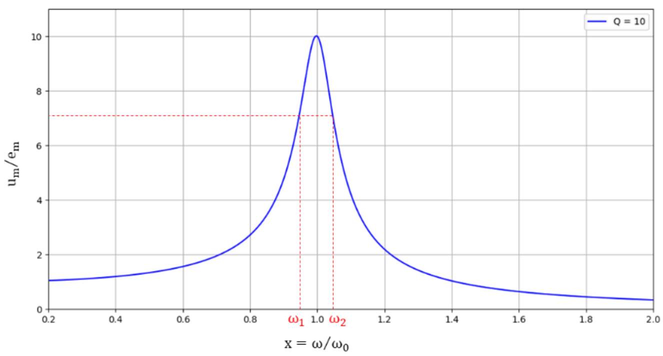
On a :

$$\frac{dg}{dx} = 2Q^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = 1}$$

L'intensité présente toujours un maximum en $\omega_{res} = \omega_0$.

L'intensité vaut alors : $\boxed{I_m(\omega_{res}) = I_0 = \frac{E_m}{R}}$

Déterminons l'acuité de la résonance (→ résonance fine ou large ?)



Définitions :

On appelle **pulsation de coupure** à $-3\ dB$ (décibel) la ou les pulsations ω_c tel que : $\boxed{I_m(\omega_c) = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}}$

On appelle **bande passante** (BP) du système l'intervalle de pulsation $\Delta\omega$ tel que : $I_m(\omega) \geq \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$

Déterminons la BP en intensité du circuit RLC.

- Fréquences de coupure :

$$I_m(x_c) = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 + Q^2\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \quad Q\left(x_c - \frac{1}{x_c}\right) = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_c^2 \mp \frac{x_c}{Q} - 1 = 0} \qquad \leftarrow \ \cdot \frac{x_c}{Q}$$

Discriminant :

$$\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0$$

On obtient 4 solutions :

$$x_{c,\pm\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{1}{Q} \pm \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}\right)$$

Or, on a nécessairement $x_c > 0$. Il reste donc deux solutions :

$$\boxed{x_{c,\pm} = \frac{1}{2}\left(\pm\frac{1}{Q} + \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}\right)}$$

Calculons la BP :

$$BP = \Delta\omega = \omega_{c,+} - \omega_{c,-} = \omega_0(x_{c,+} - x_{c,-}) = \boxed{\frac{\omega_0}{Q}}$$

Généralisation :

La relation $BP = \frac{\omega_0}{Q}$ n'est pas toujours vraie mais le fait que $BP \searrow$ lorsque $Q \nearrow$ est toujours vrai.

Conclusion : Le facteur de qualité contrôle l'acuité de la résonance. Plus Q est élevé, plus la BP est étroite.