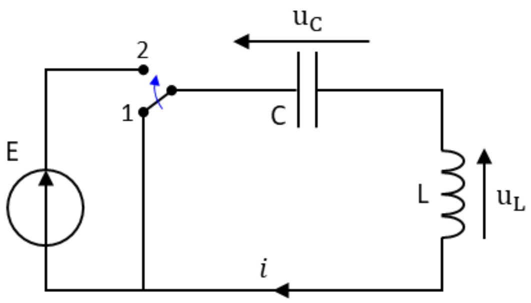
E3 · Circuits du second ordre : oscillateurs électriques

I - Circuit LC : oscillateur harmonique

I.1 - Circuit

On considère le circuit suivant. À $t = 0$, on bascule l'interrupteur dans la position 2.



En $t = 0^-$, on suppose qu'un régime stationnaire est atteint. Ainsi,

- Condensateur = circuit ouvert : $\boxed{i(0^-) = 0}$
- Bobine = fil électrique : $\boxed{u_L(0^-) = 0}$
- Loi des mailles :

$$0 = u_c + \underbrace{u_L}_{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C(0^-) = 0}$$

Grandeurs en $t = 0^+$:

- La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue : $\boxed{u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = 0}$
- L'intensité à travers une bobine est toujours continue $\boxed{i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0}$
- Loi des mailles : $E = u_L + u_C \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_L(t = 0^-) = -E}$

En $t = +\infty$, on suppose qu'un régime stationnaire est atteint de nouveau atteint (remarque : on verra dans la suite qu'en réalité il ne l'est pas). Ainsi,

- Condensateur = circuit ouvert : $\boxed{i(+\infty) = 0}$
- Bobine = fil électrique : $\boxed{u_L(+\infty) = 0}$
- Loi des mailles :

$$E = u_c + \underbrace{u_L}_{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C(+\infty) = E}$$

I.2 - Mise en équation

Équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$? Loi des mailles :

$$E = u_L + u_C = L\frac{di}{dt} + u_C = CL\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2u_C}{dt^2} + \omega_0^2\, u_C = \omega_0^2\, E}$$

Avec $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ la **pulsation propre** du système.

<u>Unité</u> : $rad \cdot s^{-1}$. <u>Dimension</u> : $[\omega_0] = T^{-1}$.

Il s'agit une EDL du deuxième ordre à coefficients constants et sans second membre.

Forme générale d'une ED d'oscillateur harmonique :

$$\ddot{f}(\mathrm{t}) + \omega_0^2\, f(t) = \omega_0^2\, f_{eq}$$

I.3 - Résolution de l'ED

a) Solution générale

On sait que la solution s'écrit : $u_{c(t)} = u_{c,SEH}(t) + u_{c,SP}(t)$.

On admet que (démonstration en cours de maths) la SEH s'écrit :

$$\boxed{\mathrm{u_{c,SEH}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}} \qquad \text{avec } (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \text{ deux constantes}$$

ou

$$\boxed{\mathrm{u_{c,SEH}(t) = U_m\cos(\omega_0 t + \phi)}} \qquad \text{avec } (\mathrm{U_m}, \phi) \text{ deux constantes}$$

$$\mathrm{U_m} > 0 \ \text{ et } \ \phi \in \left]-\pi, \pi\right]$$

<u>Vérification</u> :

- Premier cas :

$$\frac{\mathrm{du_C}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{A}\omega_0\sin(\omega_0 t) + \mathrm{B}\omega_0\cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d^2u_C}}{\mathrm{dt^2}} = -\mathrm{A}\omega_0^2\cos(\omega_0 t) - \mathrm{B}\omega_0^2\sin(\omega_0 t) = -\omega_0^2\,\mathrm{u_C(t)}$$

- Deuxième cas :

$$\frac{\mathrm{du_C}}{\mathrm{dt}} = -\mathrm{U_m}\omega_0\sin(\omega_0 t + \phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d^2u_C}}{\mathrm{dt^2}} = --\,\mathrm{U_m}\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2\,\mathrm{u_C(t)}$$

Dans les deux cas, on retrouve bien :

$$\frac{\mathrm{d^2u_C}}{\mathrm{dt^2}} + \omega_0^2\,\mathrm{u_C} = 0$$

b) Équivalence des deux formes

Montrons que les deux formes sont rigoureusement équivalentes.

<u>Rappel</u> :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Ainsi,

$$\mathrm{u_c(t)} = \mathrm{U_m}\cos(\omega_0 t + \phi) = \mathrm{U_m}[\cos(\omega_0 t)\cos(\phi) - \sin(\omega_0 t)\sin(\phi)] = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t) + \mathrm{B}\sin(\omega_0 t)$$

Avec :

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{A} = \mathrm{U_m}\cos(\phi) \\ \mathrm{B} = -\mathrm{U_m}\sin(\phi) \end{cases}}$$

Réciproquement,

$$\begin{cases} \mathrm{A^2 + B^2} = \mathrm{U_m^2}[\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)] = \mathrm{U_m^2} \\ -\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \dfrac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = \tan(\phi) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \mathrm{U_m} = \sqrt{\mathrm{A^2 + B^2}} \\ \phi = \arctan\left(-\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\right) \end{cases}}$$

Les deux formes ont leur avantage :

- $\mathrm{A}\cos(\omega_0 t) + \mathrm{B}\sin(\omega_0 t)$ permet de déterminer plus facilement les constantes (A, B) à l'aide des CI.
- $\mathrm{u_c(t)} = \mathrm{U_m}\cos(\omega_0 t + \phi)$ permet une représentation graphique plus facile.

c) Détermination des constantes d'intégration

Solution générale :

$$\mathrm{u_c(t)} = \mathrm{A}\cos(\omega_0 t) + \mathrm{B}\sin(\omega_0 t) + E$$

On a vu que :

$$u_C(t=0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{du_C}{dt}(t=0^+) = \frac{i(t=0^+)}{C} = 0$$

Ainsi,

$$u_C(t=0^+) = 0 = A + E \quad \Rightarrow \quad A = -E$$

Et,

$$\frac{du_C}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \frac{du_C}{dt}(t=0^+) = 0 = B\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=0}$$

Finalement :

$$\boxed{u_c(t) = E\,[1-\cos(\omega_0 t)]}$$

On en déduit les autres grandeurs :

$$\boxed{i = C\frac{du_c}{dt} = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot \sin(\omega_0 t)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{u_L = E - u_c(t) = E\cos(\omega_0 t)}$$

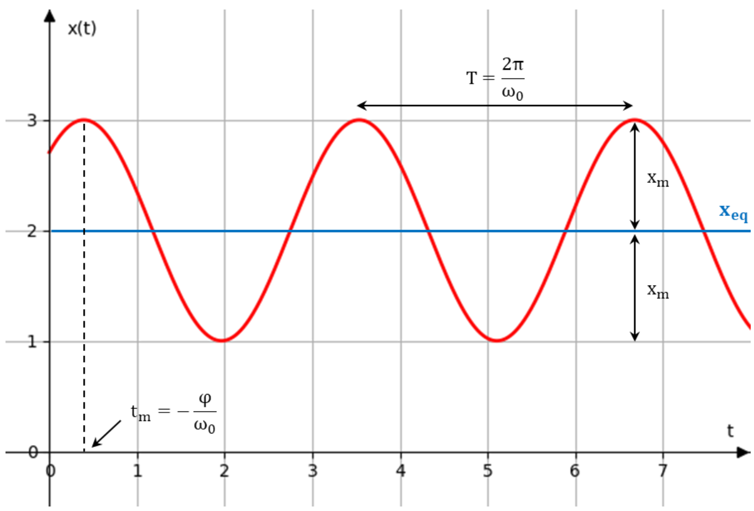
Le régime permanant est un **régime sinusoïdal**.

Remarque :

- **Régime stationnaire** : régime où les grandeurs sont constantes
- **Régime permanent** : régime qui s'établi au bout d'un temps très long.

I.4 - Représentation graphique

Représentation de la fonction : $u_c(t) = U_{eq} + U_m \cos(\omega_0 t + \phi)$



Il s'agit d'une fonction cosinus :

- elle oscille donc entre $U_{eq} - U_m$ et $U_{eq} + U_m$;
- elle atteint son maximum (celui le plus proche de l'origine, entre $-\frac{T}{2}$ et $\frac{T}{2}$) lorsque :

$$\omega_0 t_0 + \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_0 = -\frac{\phi}{\omega_0}}$$

Définitions :

- U_m → l'**amplitude** des oscillations ;
- U_{eq} → **valeur moyenne** des oscillations ;
- $\omega_0 t + \phi$ → la **phase** du signal à l'instant t (en radians) ;
- ϕ → la **phase à l'origine** (sous-entendu à l'origine des temps, i.e. lorsque $t = 0$) en radians ;

- ω_0 → la **pulsation propre** des oscillations.
- **Fréquence** du signal : $\boxed{\omega_0 = 2\pi f}$
- **Période** du signal : $\boxed{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0}}$

I.5 - Bilan énergétique

a) Bilans

Bilan de puissance :

$$E = u_L + u_C \quad \Rightarrow \quad \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_g} = \underbrace{u_L i}_{\mathcal{P}_L} + \underbrace{u_C i}_{\mathcal{P}_C} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(EC\,u_c) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L\,i^2 + \frac{1}{2}C\,u_c^2\right)$$

La puissance fournie par le générateur $\mathcal{P}_g$ et reçue par la bobine $\mathcal{P}_L$ et le condensateur $\mathcal{P}_C$.

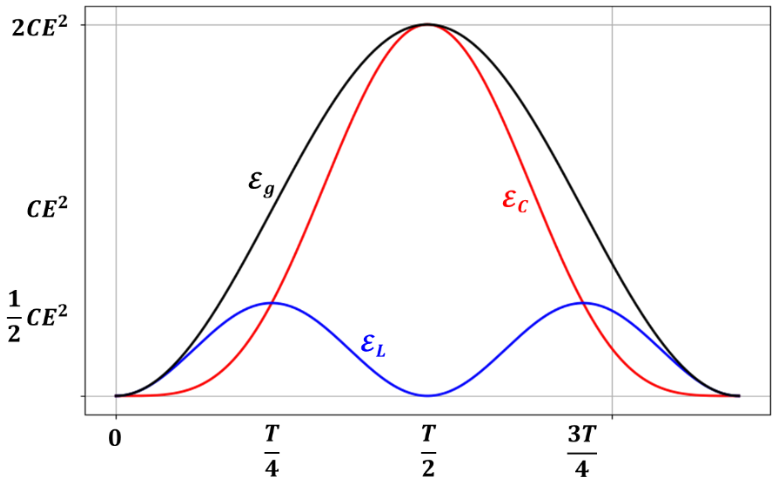
Remarque : $\mathcal{P}_g = Ei(t)$ peut être positive ou négative.

On en déduit :

$$\underbrace{EC\,u_c}_{\mathcal{E}_g} = \underbrace{\frac{1}{2}L\,i^2}_{\mathcal{E}_L} + \underbrace{\frac{1}{2}C\,u_c^2}_{\mathcal{E}_C} + cte \quad \text{avec :} \quad cte = 0$$

L'énergie fournie par le générateur $\mathcal{E}_g$ entre 0 et t est égale à l'énergie stockée dans la bobine $\mathcal{E}_L$ et dans le condensateur$\mathcal{E}_C$. Normal car il n'y a pas de source de dissipation d'énergie (pas de résistance).

Représentation graphique :



b) Valeur moyenne

Définition :

On appelle valeur moyenne d'un signal $s(t)$ de période T :

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt$$

Propriétés :

- $\langle \alpha \rangle = \alpha$ avec α constante
- $\langle \alpha \times f \rangle = \alpha \times \langle f \rangle$
- $\langle f + g \rangle = \langle f \rangle + \langle g \rangle$
- $\langle f \times g \rangle \neq \langle f \rangle \times \langle g \rangle$

Exemples à connaître :

- $\langle\cos(\omega t)\rangle = \langle\sin(\omega t)\rangle = 0$
- $\langle\cos^2(\omega t)\rangle = \langle\sin^2(\omega t)\rangle = 1/2$

Exercice : démontrer que $\langle\cos(\omega t)\rangle = 0$ et $\langle\cos^2(\omega t)\rangle = 1/2$

On rappelle que :

$$\begin{cases}\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\cos^2(\theta) = \dfrac{1+\cos(2\theta)}{2} \\ \sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}\end{cases}$$

Application :

$$\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}CE^2\ \sin^2(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \langle\mathcal{E}_L\rangle = \frac{1}{4}CE^2$$

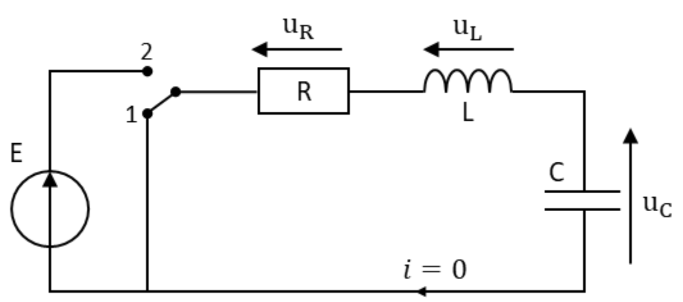
$$\mathcal{E}_g = CE\,u_c = CE^2\,[1-\cos(\omega_0 t)] \quad \Rightarrow \quad \langle\mathcal{E}_g\rangle = CE^2$$

$$\mathcal{E}_g = \mathcal{E}_L + \mathcal{E}_C \quad \Rightarrow \quad \langle\mathcal{E}_C\rangle = \langle\mathcal{E}_g\rangle - \langle\mathcal{E}_L\rangle = \frac{3}{4}CE^2$$

II - Circuit RLC : oscillateur amorti

II.1 - Circuit

On s'intéresse au circuit RLC série suivant



En $t = 0^-$, on suppose qu'un régime stationnaire est atteint. Ainsi,

- Condensateur = circuit ouvert : $\boxed{i(0^-) = 0}$ donc $\boxed{u_R(0^-) = 0}$
- Bobine = fil électrique : $\boxed{u_L(0^-) = 0}$
- Loi des mailles :

$$0 = u_c + \underbrace{u_L}_{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C(0^-) = 0}$$

Grandeurs en $t = 0^+$:

- La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue : $\boxed{u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = 0}$
- L'intensité à travers une bobine est toujours continue $\boxed{i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0}$
- Loi des mailles : $E = u_L + u_C \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_L(t = 0^-) = -E}$

En $t = +\infty$, on suppose qu'un régime stationnaire est atteint de nouveau atteint. Ainsi,

- Condensateur = circuit ouvert : $\boxed{i(+\infty) = 0}$ donc $\boxed{u_R(+\infty) = 0}$
- Bobine = fil électrique : $\boxed{u_L(+\infty) = 0}$
- Loi des mailles :

$$E = u_c + \underbrace{u_L}_{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_C(+\infty) = E}$$

II.2 - Mise en équation

Équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$? Loi des mailles :

La loi des mailles donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= \mathrm{u_R} + \mathrm{u_L} + \mathrm{u_C} \\ &= \mathrm{R}i + \mathrm{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{dt}} + \mathrm{u_C} \\ &= \mathrm{RC}\,\dot{\mathrm{u}}_\mathrm{C} + \mathrm{LC}\,\ddot{\mathrm{u}}_\mathrm{C} + \mathrm{u_C} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\ddot{\mathrm{u}}_\mathrm{C} + \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\,\dot{\mathrm{u}}_\mathrm{C} + \frac{1}{\mathrm{LC}}\,\mathrm{u_C} = \frac{E}{LC}}$$

Cette équation est une **équation différentielle linéaire du second ordre** (EDL2) à coefficients constants et avec second membre.

On définit la forme canonique :

$$\boxed{\ddot{\mathrm{u}}_\mathrm{C} + \frac{\omega_0}{\mathrm{Q}}\,\dot{\mathrm{u}}_\mathrm{C} + \omega_0^2\,\mathrm{u_C} = \omega_0^2\,E}$$

Avec :

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la **pulsation propre** du système.
- Q le **facteur de qualité** du système. C'est un nombre sans dimension. Ici : $\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$.

Remarque : si $Q \to +\infty \Leftrightarrow \mathrm{R} \to 0$, on retrouve bien l'ED de l'oscillateur harmonique (cela revient à négliger les pertes par effet Joule).

II.3 - Équation caractéristique de l'EDH

Équation homogène (EH) :

$$\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_c + \omega_0^2\,u_c(t) = 0$$

On cherche des solutions de la forme e^{rt}, avec r à déterminer.

L'équation homogène devient :

$$r^2e^{rt} + \frac{\omega_0}{Q}re^{rt} + \omega_0^2e^{rt} = 0$$

On appelle **équation caractéristique** (EC) associée à l'ED : $\boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0}$

Le discriminant de l'équation caractéristique vaut : $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$

La valeur de r et donc la fore des solutions dépend du signe de Δ.

- $\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q > 1/2$ **régime pseudo-périodique**
- $\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q < 1/2$ **régime apériodique**
- $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q = 1/2$ **régime critique**

Pour la suite, on pose : $\boxed{\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}}$ et $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{\left|\frac{1}{4Q^2} - 1\right|}}$

II.4 - Solution en régime pseudo-périodique

Cas où : $\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q > 1/2$

Solutions de l'EC : $r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{|\Delta|}\right) = -\lambda \pm j\Omega$

Solution de l'EH (au choix) :

$$\boxed{\begin{aligned} u_{c,SEH}(t) &= C\,e^{r_+t} + D\,e^{r_-t} = e^{-\lambda t}\left(C\,e^{j\Omega t} + D\,e^{-j\Omega t}\right) \\ &= e^{-\lambda t}\,(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) \\ &= \mathrm{F_m}\,e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \phi) \end{aligned}}$$

← La plus utile pour déterminer les CI
← La plus utile pour tracer la fonction

Remarque :

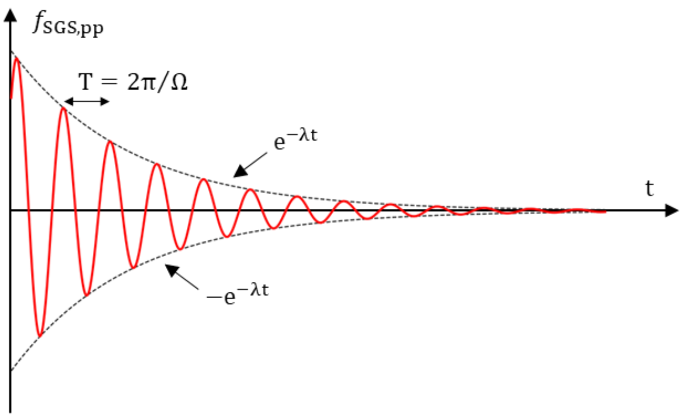
Démonstration du passage entre les deux premières formes.

$$\begin{aligned} C\,e^{j\Omega t} + D\,e^{-j\Omega t} &= C\,[\cos(\Omega t) + j\sin(\Omega t)] + D\,[\cos(\Omega t) - j\sin(\Omega t)] \\ &= (C+D)\cos(\Omega t) + j(C-D)\sin(\Omega t) \end{aligned}$$

On pose donc :

$$\boxed{A = C + D \in \mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{B = j(C-D) \in \mathbb{R}}$$

Graphe :



Définitions :

$\Omega < \omega_0$ est la **pseudo-pulsation**, toujours inférieure à la pulsation propre.

$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\Omega}$ est la **pseudo-période**.

λ est le **facteur d'amortissement** : il dicte la rapidité de la décroissance exponentielle.

Déterminons le temps caractéristique τ du régime transitoire.

On cherche l'enveloppe sous la forme :

$$u_c(t) \sim e^{-t/\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{pp} = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}}$$

Remarques :

○ Dans le cas où $Q \gg 1/2$, on a : $\Omega \to \omega_0$ et $\tau \to +\infty$.

Le régime transitoire devient infiniment long et le système oscille à la pulsation propre.

Conclusion : on tend vers le comportement de l'OH.

○ Le **facteur de qualité** donne une bonne approximation du nombre d'oscillations visibles.

Exemple : sur le schéma, $Q \sim 5 - 6$.

Pour notre circuit d'étude :

$$u_c(t) = e^{-\lambda t}\,(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) + E$$

Avec les CI :

$$u_c(0^+) = A + E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -E}$$

Et,

$$\dot{u}_c(t) = -\lambda\, e^{-\lambda t}\,(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)) + \Omega\, e^{-\lambda t}\,(-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)) \quad\Rightarrow\quad \dot{u}_c(0^+) = -\lambda A + \Omega B = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\lambda A}{\Omega} = -E\frac{\lambda}{\Omega}$$

Bilan :

$$\boxed{u_c(t) = -E\, e^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right) + E}$$

<u>Graphe</u>.

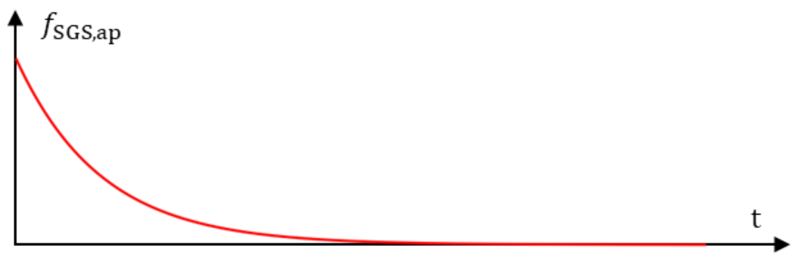
II.5 - Solution en régime apériodique

Cas où : $\Delta > 0 \quad\Leftrightarrow\quad Q < 1/2$

Solutions de l'EC : $r_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}\right) = -\lambda \pm \Omega$

Solution de l'EH (au choix) :

$$\boxed{\begin{aligned} u_{c,SEH}(t) &= C\, e^{r_+ t} + D\, e^{r_- t} = e^{-\lambda t}\,(C\, e^{\Omega t} + D\, e^{-\Omega t}) \\ &= e^{-\lambda t}\,(A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t)) \end{aligned}}$$ ← La plus utile



<u>Remarque</u> : ici, Ω je joue plus le rôle de « pulsation ».

Déterminons le temps caractéristique τ du régime transitoire.

$$f_{SEH}(t) = C\, e^{-(\lambda-\Omega)t} + D\, e^{-(\lambda+\Omega)t}$$

On voit apparaître deux temps caractéristiques :

$$\tau_1 = \frac{1}{\lambda - \Omega} \qquad \text{et} \qquad \tau_2 = \frac{1}{\lambda + \Omega}$$

On cherche le plus grand des deux temps.

$$\tau = \max(\tau_1\,;\,\tau_2) = \frac{1}{\lambda - \Omega}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{\tau} = \lambda - \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$$

On se place dans la limite où $Q \ll 1/2$.

Ainsi,

$$\sqrt{1 - 4Q^2} \simeq 1 - 2Q^2$$

Donc,

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{\omega_0}{2Q} \times 2Q^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{ap} = \frac{1}{\omega_0 Q}}$$

Pour notre circuit d'étude :

$$u_c(t) = e^{-\lambda t}\,(A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t)) + E$$

Avec les CI :

$$u_c(0^+) = A + E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -E}$$

Et,

$$\dot{u}_c(t) = -\lambda\, e^{-\lambda t}\,(A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t)) + \Omega\, e^{-\lambda t}\,(A\,\mathrm{sh}(\Omega t) + B\,\mathrm{ch}(\Omega t)) \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_c(0^+) = -\lambda \mathrm{A} + \Omega \mathrm{B} = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{\lambda A}{\Omega} = -E\frac{\lambda}{\Omega}$$

Bilan :

$$\boxed{u_c(t) = -E\, e^{-\lambda t}\left(\mathrm{ch}(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\mathrm{sh}(\Omega t)\right) + E}$$

Graphe.

II.6 - Solution en régime critique

Cas où : $\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q = 1/2$

Solution de l'EC : $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$

Solution de l'EH : $\boxed{u_{c,SEH}(t) = e^{rt}(A + Bt) = \mathrm{e}^{-\omega_0 \mathrm{t}}\,(\mathrm{A} + \mathrm{Bt})}$

Graphe :

C'est l'exponentielle qui dicte la décroissance.

$$\boxed{\tau_{crit} = \frac{1}{\omega_0}}$$

Pour notre circuit d'étude :

$$u_c(t) = \mathrm{e}^{-\omega_0 \mathrm{t}}\,(\mathrm{A} + \mathrm{Bt}) + E$$

Avec les CI :

$$u_c(0^+) = A + E = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = -E}$$

Et,

$$\dot{u}_c(t) = -\omega_0\, \mathrm{e}^{-\omega_0 \mathrm{t}}(\mathrm{A} + \mathrm{Bt}) + \mathrm{B}\, \mathrm{e}^{-\omega_0 \mathrm{t}} \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_c(0^+) = -\mathrm{A}\omega_0 + \mathrm{B} = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = \mathrm{A}\omega_0 = -E\omega_0$$

Bilan :

$$\boxed{u_c(t) = -E\ \mathrm{e}^{-\omega_0 \mathrm{t}}\ (1 + \omega_0 \mathrm{t}) + E}$$

Graphe.

II.7 - Aspect énergétique

Bilan de puissance :

$$\mathrm{E} = \mathrm{u_L} + \mathrm{u_C} + u_R \quad \Rightarrow \quad \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_g} = \underbrace{\mathrm{u_L}i}_{\mathcal{P}_L} + \underbrace{\mathrm{u_C}i}_{\mathcal{P}_C} + \underbrace{\mathrm{R}i^2}_{\mathcal{P}_R} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(EC\,u_c) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L\,i^2 + \frac{1}{2}C\,u_c^2\right) + Ri^2$$

Bilan d'énergie

- Énergie fournie par le générateur :

$$\mathcal{E}_g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}(EC\,u_c)\,dt = [EC\,u_c]_0^{+\infty} = CE^2$$

- Énergie reçue (**stockée sous forme électrostatique**) par le condensateur.

$$\mathcal{E}_C(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}C\,u_c^2\right)\,dt = \left[\frac{1}{2}C\,u_c^2\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}CE^2$$

- Énergie reçue (**stockée sous forme magnétique**) par la bobine.

$$\mathcal{E}_L(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)\,dt = \left[\frac{1}{2}Li^2\right]_0^{+\infty} = 0$$

- $\mathcal{E}_\mathrm{R}$: l'énergie reçue (**dissipée par effet Joule**) par la résistance.

$$\mathcal{E}_R(t) = -\mathcal{E}_C(t) - \mathcal{E}_L(t) - \mathcal{E}_g(t) = \frac{1}{2}\,CE^2$$

La moitié de l'énergie fournie par le générateur est stockée par le condensateur, l'autre moitié est perdue par effet Joule.

III - Bilan : oscillateurs soumis à une excitation constante

Oscillateur harmonique :

$$\ddot{f}(t) + \omega_0^2\,f(t) = \omega_0^2\,f_{eq} \quad \Rightarrow \quad f(t) = f_{eq} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Avec :

- ω_0 la **pulsation propre**
- f_{eq} la solution en régime permanant (« position d'équilibre »). Le système va osciller à l'infini autour de cette position d'équilibre (car $\langle f(t)\rangle = f_{eq}$).

Oscillateur amorti :

$$\ddot{f}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{f}(t) + \omega_0^2\,f(t) = \omega_0^2\,f_{eq} \quad \Rightarrow \quad f(t) = f_{eq} + f_{SEH}(t)$$

Le système va toujours converger vers la position d'équilibre (car $f_{SEH}(+\infty) = 0$ pour tous les régimes). Le **facteur de qualité** Q est un paramètre crucial du système. Il dicte :

- La forme de la solution.
- Le temps du régime transitoire.

Régime critique

$$f_{SEH}(t) = e^{-\lambda t}(At + B)$$

↓

Régime apériodique

$$f_{SEH}(t) = e^{-\lambda t}(A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t))$$

$\boxed{1/2}$

Régime pseudo-périodique

$$f_{SEH}(t) = e^{-\lambda t}(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$$

Q

$$\tau_{ap} = \frac{1}{\omega_0 Q} \qquad \tau_{crit} = \frac{1}{\omega_0} \qquad \tau_{pp} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

↑

Temps minimum

Avec :

$$\boxed{\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{\left|\frac{1}{4Q^2} - 1\right|}}$$