

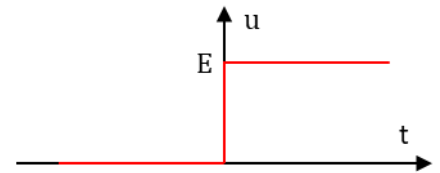


I - Circuit RC soumis à un échelon de tension

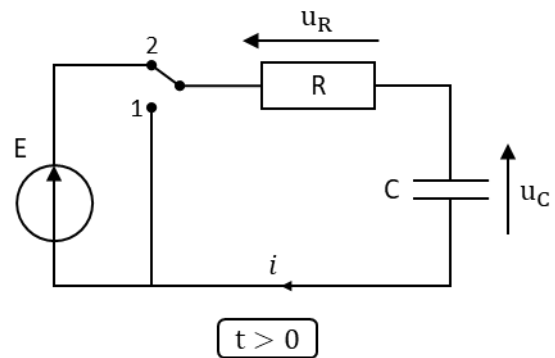
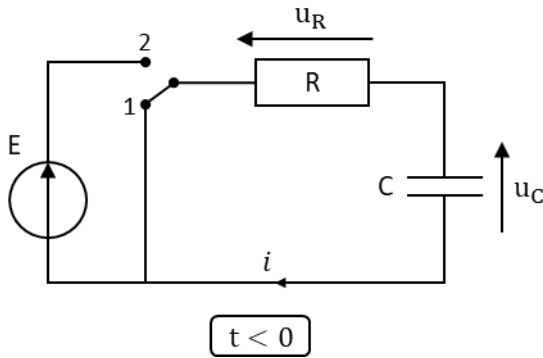
I.1 - Description du circuit

Un échelon de tension correspond à un signal de la forme suivante :

$$\begin{cases} u(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ u(t) = E & \text{si } t > 0 \end{cases}$$



On considère le circuit RC suivant.



I.2 - Conditions initiales

On suppose qu'en $t = 0^-$, le circuit est dans un état stationnaire.

C'est-à-dire que l'on a attendu suffisamment longtemps pour que toutes les grandeurs soient indépendantes du temps.

On a alors :

- Relation i/u_C du condensateur : $i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow i(t = 0^-) = 0$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \Rightarrow u_R(t = 0^-) = 0$
- Loi des mailles : $0 = u_R + u_C \Rightarrow u_C(t = 0^-) = 0$

Que valent ces grandeurs en $t = 0^+$?

- La tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue : $u_C(t = 0^-) = u_C(t = 0^+) \Rightarrow u_C(t = 0^+) = 0$
- Loi des mailles : $E = u_R + u_C \Rightarrow u_R(t = 0^+) = E$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \Rightarrow i(t = 0^+) = \frac{E}{R}$

I.3 - Prédiction de l'état final

Que se passe-t-il lorsque $t \rightarrow +\infty$?

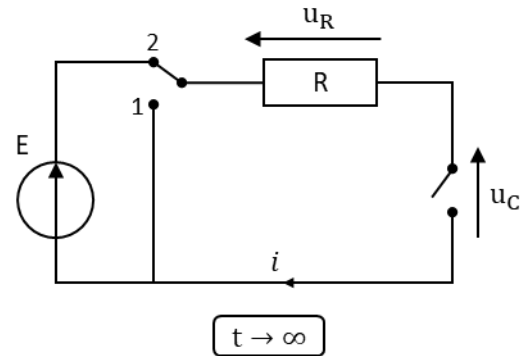
L'excitation étant constante, on va atteindre un nouveau régime stationnaire. Ainsi,

- Relation i/u_C du condensateur : $i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow \boxed{i(t \rightarrow +\infty) = 0}$
- Loi d'Ohm : $u_R = Ri \Rightarrow \boxed{u_R(t \rightarrow +\infty) = 0}$
- Loi des mailles : $E = u_R + u_C \Rightarrow \boxed{u_C(t \rightarrow +\infty) = E}$

Circuit équivalent en $+\infty$:

En régime stationnaire, le condensateur ne laisse passer aucun courant.

Un condensateur en régime stationnaire est équivalent à un circuit ouvert.



1.4 - Mise en équation

Cherchons l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t > 0$.

$$E = u_R + u_C \Rightarrow E = Ri + u_C$$

Or,

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

Donc,

$$E = RC \frac{du_C}{dt} + u_C \Rightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}} \quad \text{avec : } \boxed{\tau = RC}$$

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 (ED1) à coefficients constants et avec second membre constant.

$[\tau] = T$ est homogène à un temps. C'est la **constante de temps** u système.

1.5 - Résolution analytique

On rappelle que la solution de l'ED s'écrit :

$$u_C(t) = u_{C,SEH}(t) + u_{C,SP}(t)$$

Solution de l'équation homogène (SEH)

Equation homogène :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = 0$$

On admet que (démonstration en cours de maths) :

$$\boxed{u_{C,SGS}(t) = u_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \quad \text{avec } u_0 \text{ une constante}$$

Vérification :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = -\frac{u_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{u_0}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = 0$$

Solution particulière (SP)

On cherche $u_{C,SP}(t)$ sous la forme d'une constante. On remarque que : $\boxed{u_{C,SP}(t) = E}$ convient.

Bilan

Solution générale de l'ED :

$$u_c(t) = u_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + E$$

On détermine la constante à l'aide des conditions initiales :

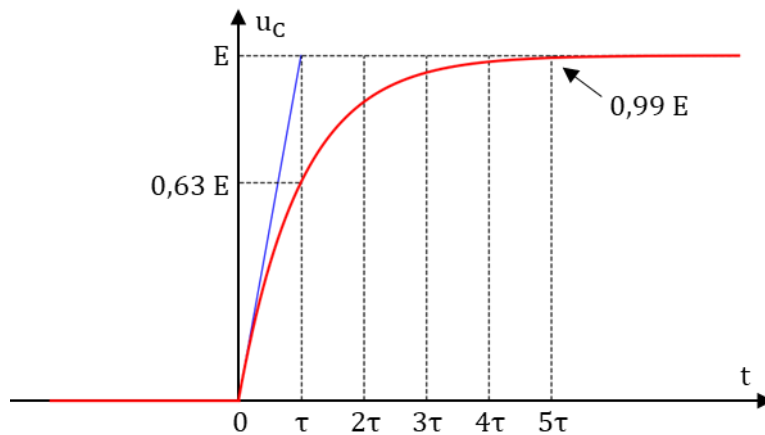
$$u_c(t = 0^+) = 0 = u_0 + E \Rightarrow u_0 = -E$$

Conclusion :

$$u_c(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

1.6 - Représentation graphique

Allure de la courbe :



On retrouve bien les valeurs limites en $t = 0^+$ et $t \rightarrow +\infty$.

Méthode : détermination graphique de τ .

Deux méthodes :

- Lorsque $t = \tau$, on a :

$$u_c(\tau) = E(1 - e^{-1}) \simeq 0,63 E$$

- Calculons la pente de la dérivée en $t = 0^+$:

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{E}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \Rightarrow \frac{du_c}{dt}(t = 0^+) = \frac{E}{\tau}$$

La tangente à l'origine intersecte la valeur finale en $t = \tau$.

On montre de plus que :

- $u_c(3\tau) = E(1 - e^{-3}) \simeq 0,95 E$
- $u_c(5\tau) = E(1 - e^{-5}) \simeq 0,99 E$.

Par convention, on dit que le régime transitoire est terminé lorsque $t \geq 5\tau$.

1.7 - Etude de l'intensité

Pour trouver l'intensité, il y a deux méthodes.

- **Détermination de l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$**

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{et} \quad i = C \frac{du_c}{dt}$$

On dérive la loi des mailles :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{du_C}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{C} \frac{di}{dt} + \frac{1}{C\tau} i = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0}$$

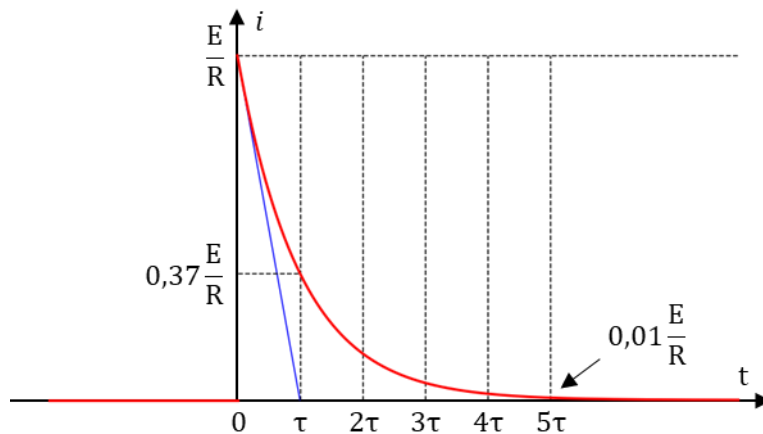
Résolution de l'ED :

$$i(t) = i_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + 0 \xrightarrow{\text{avec les CI}} \boxed{i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

○ Utilisation de l'expression de $u_C(t)$

$$\begin{cases} u_C(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow i = \frac{CE}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \boxed{\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Représentation graphique :



1.8 - Bilan énergétique

Méthode :

- Écrire la loi des mailles.
- Multiplier par i pour avoir un bilan de puissance.
- Intégrer pour avoir un bilan d'énergie.

$$E = u_R + u_C \Rightarrow \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_g} = \underbrace{u_R i}_{\mathcal{P}_R} + \underbrace{u_C i}_{\mathcal{P}_C}$$

Avec :

- \mathcal{P}_g : la puissance fournie par le générateur.
- \mathcal{P}_R : la puissance reçue par la résistance → puissance dissipée par effet Joule.
- \mathcal{P}_C : la puissance reçue par le condensateur → puissance stockée sous forme électrostatique.

On rappelle que : $\mathcal{P} = \frac{d\varepsilon}{dt} \Rightarrow \varepsilon = \int_0^{+\infty} \mathcal{P} dt$

$$\text{Ainsi, } \underbrace{\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_g dt}_{\varepsilon_g} = \underbrace{\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_R dt}_{\varepsilon_R} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_C dt}_{\varepsilon_C}$$

Avec :

- ε_g : l'énergie fournie par le générateur.
- ε_R : l'énergie reçue (**dissipée par effet Joule**) par la résistance.
- ε_C : l'énergie reçue (**stockée sous forme électrostatique**) par le condensateur.

$$\mathcal{E}_g = \int_0^{+\infty} E i dt = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[-\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^{+\infty} = CE^2$$

$$\mathcal{E}_R = \int_0^{+\infty} R i^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[-\frac{\tau}{2} \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right) \right]_0^{+\infty} = \frac{CE^2}{2}$$

$$\mathcal{E}_C = \int_0^{+\infty} u_C i dt = \int_0^{+\infty} C u_C \frac{du_C}{dt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) dt = \int_0^{+\infty} d \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) = \left[\frac{1}{2} C u_C^2 \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} CE^2$$

Remarque :

- On a bien conservation de l'énergie.
- On retrouve que l'énergie stockée par le condensateur vaut :

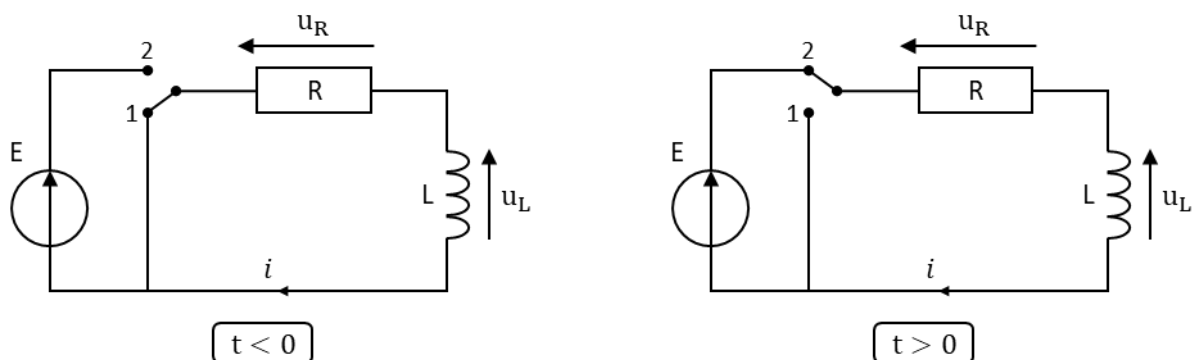
$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2(+\infty)$$

Ainsi, la moitié de l'énergie est stockée dans le condensateur, l'autre moitié est dissipée par effet Joule dans la résistance.

II - Circuit RL soumis à un échelon de tension

II.1 - Description du circuit

On considère le circuit RL suivant.



II.2 - Conditions initiales et état final

On suppose qu'en $t = 0^-$, le circuit est dans un état stationnaire. Ainsi,

- Relation i/u_L de la bobine : $u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{u_L(t = 0^-) = 0}$
- Loi des mailles : $0 = u_R + u_L \Rightarrow \boxed{u_R(t = 0^-) = 0}$
- Loi d'Ohm : $u_R = R i \Rightarrow \boxed{i(t = 0^-) = 0}$

Que valent ces grandeurs en $t = 0^+$?

- L'intensité à travers une bobine est toujours continue : $i(t = 0^-) = i(t = 0^+) \Rightarrow \boxed{i(t = 0^+) = 0}$
- Loi d'Ohm : $u_R = R i \Rightarrow \boxed{u_R(t = 0^+) = 0}$
- Loi des mailles : $E = u_R + u_L \Rightarrow \boxed{u_L(t = 0^+) = E}$

Que se passe-t-il lorsque $t \rightarrow +\infty$?

L'excitation étant constante, on va atteindre un nouveau régime stationnaire. Ainsi,

- Relation i/u_L de la bobine : $u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \boxed{u_L(t \rightarrow +\infty) = 0}$

○ Loi des mailles :

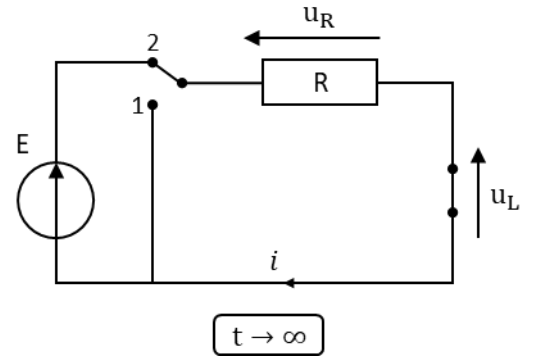
$$E = u_R + u_L \Rightarrow \boxed{u_R(t \rightarrow +\infty) = E}$$

○ Loi d'Ohm :

$$u_R = Ri \Rightarrow \boxed{i(t \rightarrow +\infty) = E/R}$$

En régime stationnaire, il n'y a aucune tension aux bornes de la bobine.

Une bobine en régime stationnaire est équivalente à un fil électrique.



II.3 - Mise en équation

Cherchons l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t > 0$.

$$E = u_R + u_L \Rightarrow E = Ri + L \frac{di}{dt}$$

Donc,

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L}$$

Finalement,

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

Avec τ la constante de temps du système.

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 (ED1) à coefficient constante et avec second membre constant.

II.4 - Résolution analytique

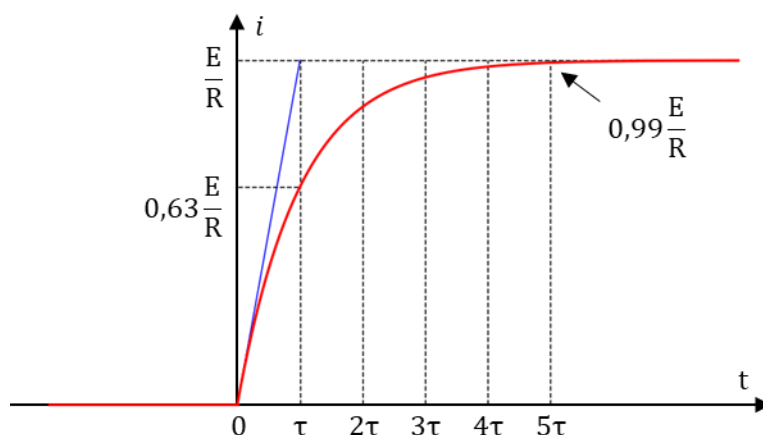
La solution générale de l'ED est :

$$i(t) = \underbrace{i_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}_{SEH} + \underbrace{\frac{E}{R}}_{SP}$$

Avec les CI :

$$i(0^+) = 0 = i_0 + \frac{E}{R} \Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

Représentation graphique :

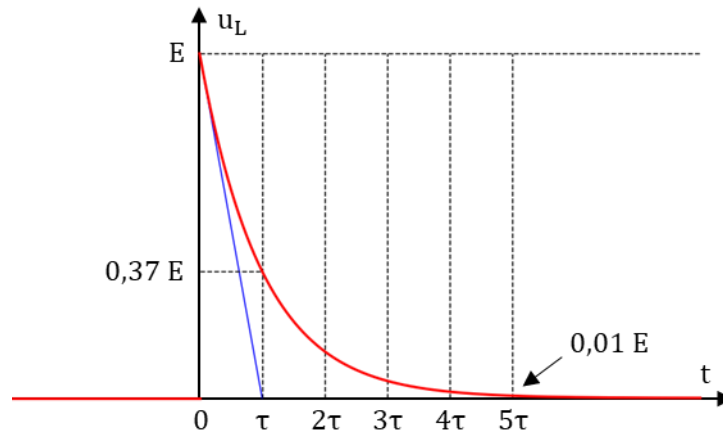


II.5 - Etude de la tension aux bornes de la bobine

Utilisons directement :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow u_L = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Graphique :



II.6 - Bilan énergétique

Même méthode que pour le circuit RC.

Loi des mailles :

$$E = u_R + u_L \Rightarrow \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_g} = \underbrace{u_R i}_{\mathcal{P}_R} + \underbrace{u_L i}_{\mathcal{P}_L}$$

Avec :

- \mathcal{P}_L : la puissance reçue par la bobine → stockée sous forme magnétique.

Ainsi,

$$\underbrace{\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_g dt}_{\mathcal{E}_g} = \underbrace{\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_R dt}_{\mathcal{E}_R} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_L dt}_{\mathcal{E}_L}$$

Avec :

- \mathcal{E}_L : l'énergie reçue (**stockée sous forme magnétique**) par la bobine.

$$\mathcal{E}_g = \int_0^{+\infty} Ei dt = \int_0^{+\infty} \frac{E^2}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) dt = \frac{E^2}{R} \left[t + \tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^{+\infty} = +\infty$$

$$\mathcal{E}_L = \int_0^{+\infty} u_L i dt = \int_0^{+\infty} L i \frac{di}{dt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) dt = \int_0^{+\infty} d \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \left[\frac{1}{2} Li^2 \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2} L \left(\frac{E}{R} \right)^2$$

$$\mathcal{E}_R = \mathcal{E}_g - \mathcal{E}_L = +\infty$$

Interprétation :

La bobine stocke une énergie : $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2} Li^2(+\infty)$

Une fois le régime permanent atteint, toute l'énergie fournie par le générateur est dissipée par effet Joule.

III - Résolution numérique d'une ED du premier ordre

Objectif : Résoudre numériquement une ED du premier ordre à l'aide de la **méthode d'Euler**.

Exemple : charge d'un condensateur.

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Interprétation :

- $u_c(t)$ valeur de u_c à l'instant t ;
- dt variation finitésimale de t . Mathématiquement : $dt \rightarrow 0$.
- $du_c = u_c(t + dt) - u_c(t)$ variation finitésimale de u_c entre les instants t et $t + dt$

Ajouter schéma illustrant ces grandeurs.

L'ED peut donc se réécrire de la manière suivante :

$$\frac{u_c(t + dt) - u_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau} \Rightarrow u_c(t + dt) - u_c(t) + u_c(t) \frac{dt}{\tau} = \frac{E}{\tau} dt$$
$$\Rightarrow \boxed{u_c(t + dt) = u_c(t) + \frac{E - u_c(t)}{\tau} dt}$$

Conclusion :

Connaissant $u_c(t)$, on peut calculer $u_c(t + dt)$. Ainsi, connaissant $u_c(0)$, on peut calculer $u_c(dt)$, puis $u_c(2dt)$, etc, puis $u_c(n \cdot dt) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mathématiquement : $dt \rightarrow 0$. Numériquement, il faut choisir dt petit pour que la solution numérique soit proche de la solution réelle, mais dt pas trop petit pour que le calcul numérique ne soit pas trop long. En pratique, il faut choisir $dt \ll \tau$.

Code Python :

```
1 import numpy as np
2
3 # Paramètres -----
4 E = 5
5 R = 1e3
6 C = 1e-5
7
8 # Méthode d'Euler -----
9 N = 10000
10 t_max = 8*R*C
11 t = np.linspace(0, t_max, N) # Array de taille N allant de 0 à t_max
12 dt = t[1] - t[0]
13
14 uc = np.zeros(N) # Création d'un array vide (rempli de 0) de taille N
15 uc[0] = 0 # Condition initiale
16
17 for i in range(N-1):
18     uc[i+1] = uc[i] + (E-uc[i]) * dt/tau
19
```