Onde électromagnétique plane progressive

On étudie une onde électromagnétique dont le champ électrique est :

$$\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \quad \text{avec :} \quad \underline{E_x} = E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \frac{k}{3}\left[2x + 2y + z\right]\right)\right)$$

1) Déterminer l'expression du vecteur d'onde $\vec{k}$.

Correction

On rappelle que l'exponentielle est de la forme, pour une onde harmonique :

$$\exp\left(i\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}\right)\right) \quad \text{avec :} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{k} = \frac{k}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Il s'agit bien d'un vecteur de norme k.

2) Décrire les surfaces d'onde.

Correction

L'onde se propage selon le vecteur $\vec{k}$ constant. Les surfaces d'onde sont les surfaces en tout point orthogonales à $\vec{k}$. Il s'agit donc des plans orthogonaux à $\vec{k}$.

3) Exprimer E_y en fonction de E_x.

Correction

L'équation de Maxwell-Gauss (dans le vide, $\rho = 0$) donne :

$$\mathrm{div}\left(\vec{E}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -i\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = -\frac{ik}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E_x} \\ \underline{E_y} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\vec{E} = E_x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_y = -E_x}$$

4) Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ relatif à cette onde.

Correction

Maxwell-Faraday donne :

$$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = -i\omega \underline{\vec{B}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{E_x}{3c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

5) Déterminer la densité moyenne d'énergie électromagnétique $\langle u_{em} \rangle$ relative à cette onde.

Correction

Attention pour le calcul, il faut au choix le faire en réel ou en complexe :

$$\langle \vec{E}^2_{\text{réel}} \rangle = \frac{\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^*}{2}$$

Ici, avec la notation complexe :

$$\langle u_{em} \rangle = \frac{\varepsilon_0}{4}\, \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{E}}^* + \frac{1}{4\mu_0}\, \underline{\vec{B}} \cdot \underline{\vec{B}}^* = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = \boxed{\varepsilon_0 E_0^2}$$

6) Déterminer la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{\Pi} \rangle$ relatif à cette onde. Quel est le lien entre $\langle u_{em} \rangle$ et $\langle \vec{\Pi} \rangle$?

Correction

La valeur moyenne du vecteur de Poynting (toujours en notation complexe) :

$$\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \, \mathcal{R}e \left(\underline{\overrightarrow{E}} \wedge \underline{\overrightarrow{B}}^* \right) = \frac{E_0^2}{3\mu_0 c} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \overrightarrow{u} = c \, \langle u_{em} \rangle \overrightarrow{u} \quad \text{avec :} \quad \overrightarrow{k} = k \overrightarrow{u}}$$

où $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{k}$.