

MODÈLE DE L'ÉLECTRON ÉLASTIQUEMENT LIÉ

On étudie un électron situé en un point M, de charge $-e$ et de masse m , dans le référentiel lié au noyau d'un atome, de centre O. Ce référentiel est supposé galiléen. L'atome interagit avec les champs \vec{E} et \vec{B} d'une onde électromagnétique plane, monochromatique, de pulsation ω . L'électron subit la force électromagnétique de Lorentz $\vec{F}_L = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

En outre, dans le cadre du modèle, l'électron est supposé soumis à une force de rappel élastique $\vec{F}_r = -k \overrightarrow{OM}$ et à une force de frottement de la forme $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$, où k et α sont des constantes positives.

1) Donner l'origine physique de la force de rappel et de la force de frottement.

Correction

La force de rappel vient de l'interaction électronique entre le noyau chargé positivement et l'électron chargé négativement.

La force de frottement vient d'une perte d'énergie par rayonnement lorsqu'une charge (l'électron) est accélérée.

2) Justifier pourquoi on peut négliger la force magnétique devant la force électrique.

Correction

On rappelle que pour une OPPH dans le vide :

$$B = \frac{E}{c}$$

On peut donc comparer les forces électrique et magnétique :

$$\frac{F_{el}}{F_{mag}} \sim \frac{eE}{evB} = \frac{c}{v} \gg 1$$

On peut négliger la force magnétique devant la force électrique tant que l'électron est non relativiste.

3) À quelle condition peut-on considérer que le champ \vec{E} de l'onde électromagnétique est uniforme à l'échelle de l'atome ?

Correction

Notons a le rayon typique de l'atome. Le champ y est uniforme si $a \ll \lambda$.

Par la suite, on admet que cette condition est satisfaite. On pose donc $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$ où \vec{E}_0 est un vecteur uniforme.

4) Déterminer le vecteur position \overrightarrow{OM} en notation complexe.

Correction

On applique le PFD à l'électron et on passe en régime sinusoïdal forcé :

$$m \vec{a} = -e \vec{E} - k \overrightarrow{OM} - \alpha \vec{v} \Rightarrow (-m\omega^2 + i\omega\alpha + k) \overrightarrow{OM} = -e \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{-e \vec{E}_0 e^{i\omega t}}{-m\omega^2 + i\omega\alpha + k}$$

5) On définit la susceptibilité complexe χ du milieu comme $\vec{p} = \chi \vec{E}$ avec \vec{p} le vecteur moment dipolaire. Montrer que la susceptibilité se met sous la forme :

$$\chi = \frac{\chi_0}{1 - x^2 + ix/Q} \quad \text{avec : } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On exprimera χ_0 , ω_0 et Q en fonction de e , m , k et α .

Correction

Par définition du moment dipolaire :

$$\vec{p} = -e \overrightarrow{OM} \Rightarrow \underline{\vec{p}} = \frac{e^2 \vec{E}_0 e^{i\omega t}}{-m\omega^2 + i\omega\alpha + k} \Rightarrow \chi = \frac{e^2}{-m\omega^2 + i\omega\alpha + k}$$

On en déduit :

$$\chi = \frac{e^2/k}{1 - \frac{m\omega^2}{k} + \frac{i\omega\alpha}{k}} \quad \text{avec : } \chi_0 = \frac{e^2}{k} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

6) Dans quel domaine de fréquence le dipôle induit par le champ exciteur ne dépend pas de la fréquence ? Comment appelle-t-on ce domaine ?

Correction

Il s'agit du domaine des basses fréquences : $\omega \ll \omega_0$

7) On admet dans ce domaine, la puissance moyenne rayonnée par un dipôle dans l'approximation dipolaire, non relativiste et dans la zone de rayonnement s'exprime

comme :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 \chi_0^2 E_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

Les gaz présents dans l'atmosphère satisfont à toutes ces conditions lorsqu'ils sont excités par le rayonnement solaire. Expliquer qualitativement pourquoi le ciel est bleu en journée, et orange au soleil couchant.

Correction

En journée, un rayon en provenance du soleil (le spectre est donné par celui d'un corps noir centré autour du vert à 500 nm) traverse une petite tranche d'atmosphère. Or, la puissance rayonnée par les molécules de l'atmosphère varie comme $\langle \mathcal{P} \rangle \propto 1/\lambda^4$. Autrement dit (en prenant un facteur 2 entre les longueurs d'onde du bleu à 400 nm et du rouge à 800 nm), elles émettent $2^4 = 16$ fois plus de bleu que de rouge. Le ciel apparaît donc bleu et le soleil blanc privé du bleu, c'est-à-dire jaune.

Le soir, un rayon en provenance du soleil traverse une grande tranche d'atmosphère. Le bleu, ainsi que le vert, du spectre ont été fortement atténués par les molécules du début de la tranche. Vers la fin de la tranche (position de l'observateur), les molécules rayonnent principalement du orange et dans une moindre mesure du rouge. Le ciel apparaît donc orangé et le soleil blanc privé de toutes les couleurs sauf du rouge, c'est-à-dire rouge.