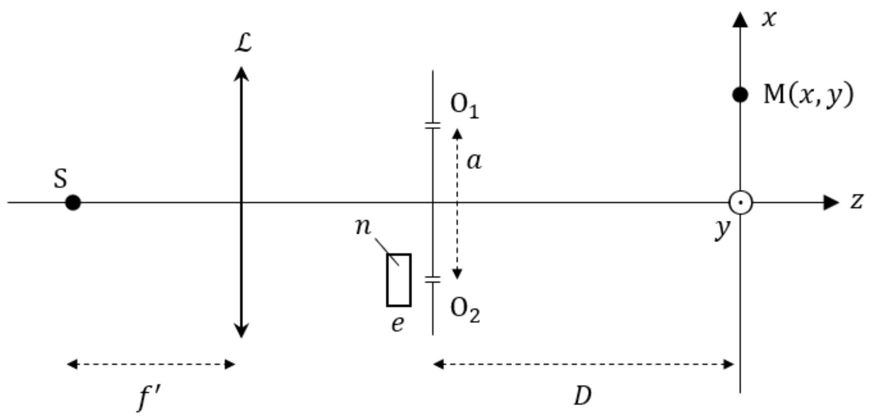
Frange achromatique

On considère le dispositif des fentes d'Young en lumière monochromatique avec observation à une distance $D \gg a$, la source étant placée au foyer objet d'une lentille $\mathcal{L}$.



1) Établir l'expression de l'intensité $I(x)$ sur l'écran (sans la lame de verre pour l'instant). Déterminer l'expression de l'interfrange.

Correction

D'après la formule de Fresnel :

$$I = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\delta\right)\right]$$

Détermination de la différence de marche δ.

$$\delta = (O_2M) - (O_1M)$$

avec :

$$\begin{aligned}(O_2M) &= \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}\\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2}\\ &\simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x+a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right]\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}(O_1M) &= \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2}\\ &= D\sqrt{1+\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2}\\ &\simeq D\left[1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-a/2}{D}\right)^2+\left(\frac{y}{D}\right)^2\right]\right]\end{aligned}$$

Après simplification :

$$\delta = \frac{ax}{D}$$

Ainsi :

$$\boxed{I(x) = 2I_0\left[1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}\right)\right]}$$

On en déduit l'interfrange, la période de $I(x)$:

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

2) Une lame de verre d'épaisseur e, d'indice n, est placée devant l'une des fentes. Déterminer la nouvelle position x_0 de la frange d'ordre 0.

Correction

Cette lame modifie la différence de marche. On a cette fois :

$$\boxed{\delta = \Big[(O_2M) + ne\Big] - \Big[(O_1M) + e\Big] = e\,(n-1) + \frac{ax}{D}}$$

La nouvelle position de la frange d'ordre 0 est :

$$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad e\,(n-1) + \frac{ax_0}{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = -\frac{eD\,(n-1)}{a}}$$

On remplace désormais la source monochromatique par une source de lumière blanche. L'indice du verre varie avec la longueur d'onde dans le vide selon la loi de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

avec A et B des constantes.

On appelle frange achromatique celle pour laquelle :

$$\frac{d\Delta\phi}{d\lambda} = 0$$

où $\Delta\phi$ le déphasage entre les deux rayons.

3) Déterminer la position x_1 de la frange achromatique. Exprimer l'écart $\Delta x = x_1 - x_0$.

Correction

Par définition de la frange achromatique :

$$\frac{d\Delta\phi}{d\lambda} = 2\pi\,\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) = 2\pi\,\frac{\delta'\lambda - \delta}{\lambda^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\delta}{d\lambda}\lambda = \delta$$

En utilisant la loi de Cauchy, il vient :

$$-\frac{eB}{\lambda^2} = e\left(A + \frac{B}{\lambda^2} - 1\right) + \frac{ax_1}{D} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -\frac{eD}{a}\left(A + \frac{2B}{\lambda^2} - 1\right)}$$

On en déduit :

$$\boxed{\Delta x = x_1 - x_0 = -\frac{eDB}{a\lambda^2}}$$