Solénoïde en régime variable

On considère un solénoïde infini d'axe (Oz), de rayon a, comportant n spires par unité de longueur parcourues par un courant d'intensité $i(t) = i_0\, e^{-t/\tau}$ avec $\tau = 10$ µs. On se place dans l'ARQS, ce qui revient à négliger les courants de déplacement. Conséquence : il est possible d'appliquer le théorème d'Ampère de la magnétostatique.

On rappelle que le champ magnétique est nul hors du solénoïde et vaut :

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 n i(t)\,\overrightarrow{u_z}$$

à l'intérieur du solénoïde.

On exprimera les diverses grandeurs en fonction de $B(t)$.

Formulaire : en coordonnées cylindriques

$$\text{div}\left(\overrightarrow{A}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

1) Déterminer le champ $\overrightarrow{E}$ en utilisant les équations de Maxwell.

Correction

On utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = \frac{B(t)}{\tau}\overrightarrow{u_z}$$

On en déduit que $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)$ est selon $\overrightarrow{u_z}$. Or, pour des raison de symétrie, $\overrightarrow{E}$ ne peut pas dépendre de la variable θ. On en déduit, à l'aide du formulaire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rE_\theta\right)}{\partial r}\overrightarrow{u_z} = \frac{B(t)}{\tau}\overrightarrow{u_z} \quad \Rightarrow \quad E_\theta = \frac{rB(t)}{2\tau}$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{rB(t)}{2\tau}\overrightarrow{u_\theta}}$$

2) Exprimer l'énergie volumique électromagnétique. Montrer que l'énergie électrique est négligeable devant l'énergie magnétique.

Correction

Par définition :

$$u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}\left(\mu_0\varepsilon_0\left[\frac{r}{2\tau}\right]^2 + 1\right) = \frac{B^2}{2\mu_0}\left(\left[\frac{r}{2c\tau}\right]^2 + 1\right)$$

Dans l'ARQS, le temps de propagation des ondes électromagnétique (τ_{em}) est négligeable devant de temps caractéristique d'évolution des grandeurs (τ). Ici :

$$\tau_{em} \simeq \frac{r}{c} \ll \tau \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{2c\tau} \ll 1$$

L'énergie électrique est bien négligeable devant l'énergie magnétique. Ainsi,

$$\boxed{u_{em} \simeq \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

3) Déterminer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$.

Correction

Par définition :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E}\wedge\overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{rB^2}{2\tau\mu_0}\overrightarrow{u_r}}$$

On rappelle l'équation de conservation locale de l'énergie électromagnétique.

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div}\left(\overrightarrow{\Pi}\right) = -\overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E}$$

4) Montrer qu'on retrouve cette équation à l'intérieur du solénoïde.

Correction

On a :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} = \frac{B\dot{B}}{\mu_0} = -\frac{B^2}{\tau\mu_0} \quad \text{et} \quad \text{div}\left(\overrightarrow{\Pi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\Pi_r\right)}{\partial r} = \frac{B^2}{\tau\mu_0}$$

La somme de ces deux termes est nulle puisque $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$ dans le solénoïde (l'air n'est pas conducteur).

L'équation de conservation locale de l'énergie électromagnétique est bien vérifiée.