Champ électrique à distribution cylindrique

Soit le champ électrique $\overrightarrow{E}$, défini en coordonnées cylindriques par :

$$\overrightarrow{E} = E_r \overrightarrow{u_r} \quad \text{avec :} \quad E_r = \begin{cases} \dfrac{E_0 r}{r_0} & \text{si : } r \leq r_0 \\ \dfrac{E_0 r_0}{r} & \text{si : } r > r_0 \end{cases}$$

Formulaire : en coordonnées cylindriques

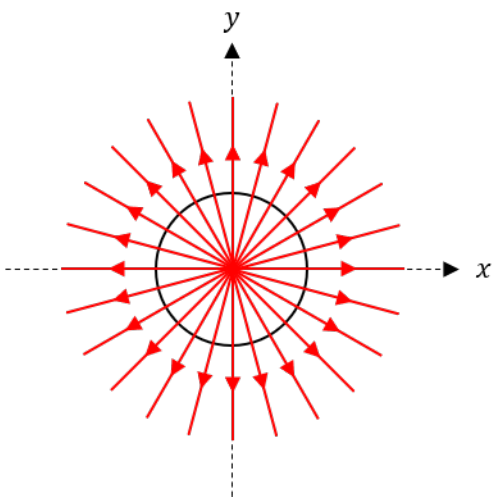
$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{A}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

1) Déterminer les lignes de champ. Comment varie $\left\|\overrightarrow{E}\right\|$ le long d'une ligne ?

Correction

Les lignes de champ sont parallèles au champ, donc à $\overrightarrow{u_r}$. Le long d'une ligne de champ, $\left\|\overrightarrow{E}\right\|$ croît jusqu'à $r = r_0$ puis diminue.



2) Calculer $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{E}\right)$ en tout point.

Correction

Avec le formulaire :

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = \frac{1}{r}\frac{d(rE_r)}{dr} = \begin{cases} \dfrac{2E_0}{r_0} & \text{si : } r \leq r_0 \\ 0 & \text{si : } r > r_0 \end{cases}}$$

3) Si $\overrightarrow{E}$ est un champ électrostatique, à quelle distribution de charge le problème correspond-il ?

Correction

D'après l'équation de Maxwell-Gauss, on a :

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho = \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon_0 E_0}{r_0} & \text{si : } r \leq r_0 \\ 0 & \text{si : } r > r_0 \end{cases}}$$

Il s'agit d'un cylindre de rayon r_0 uniformément chargé en volume.

4) Que vaut le rotationnel de ce champ ?

Correction

Avec le formulaire, on a immédiatement :

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{0}}$$

Normal pour un champ électrostatique (Maxwell-Faraday).