Production de neige artificielle

La neige artificielle est obtenue en pulvérisant de fines gouttes d'eau liquide supposées sphériques de rayon $R = 0{,}2$ mm d'eau liquide à $T_i = 10$ °C dans l'air ambiant à la température $T_e = -15$ °C.

À l'interface eau/air, le flux thermique $d\phi$ à travers une surface dS dans le sens de la normale extérieure, est donné par la loi :

$$d\phi = h\,(T(t) - T_e)\ dS$$

<u>Données</u> :

- ∘ Coefficient conducto-convectif $h = 65\ \mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-1}}$
- ∘ Chaleur latente massique de fusion $\ell_{fus} = 333\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}}$
- ∘ Capacité thermique massique de l'eau liquide $c_\ell = 4{,}2\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$
- ∘ Capacité thermique massique de l'eau solide $c_s = 2{,}1\ \mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$
- ∘ Masse volumique de l'eau liquide $\rho = 1{,}0\ \mathrm{kg\cdot L^{-1}}$
- ∘ Masse volumique de l'eau solide $\rho_s = 0{,}9\ \mathrm{kg\cdot L^{-1}}$

1) Établir l'équation différentielle régissant l'évolution temporelle de la température de la goutte $T(t)$.

Correction

Système : { Goutte }. Sa variation infinitésimale d'enthalpie vaut :

$$dH = c_\ell \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \cdot dT$$

De plus, la transformation est monobare (dans l'atmosphère à pression constante), donc le premier principe version enthalpique donne :

$$dH = -h\,(T(t) - T_e)\cdot 4\pi R^2 \cdot dt$$

Le signe « − » vient du fait qu'un flux dans le sens de la normale extérieure correspond à un flux sortant de la goutte. Or il faut mettre dans le premier principe uniquement des énergies algébriquement reçue par le système.

En égalant les deux expressions, il vient :

$$\boxed{\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_e}{\tau} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{\rho c_\ell R}{3h}}$$

2) Déterminer le temps t_0 mis par la goutte d'eau liquide pour atteindre la température de surfusion $T(t_0) = -5$ °C.

Correction

La solution de cette équation différentielle est :

$$T(t) = T_e + (T_i - T_e)\ e^{-t/\tau}$$

On isole le temps t_0 :

$$\boxed{t_0 = \tau\,\ln\left(\frac{T_e - T_i}{T_e - T(t_0)}\right) = 4{,}0\ \text{s}}$$

Lorsque la goutte a atteint la température de −5 °C, il y a rupture de la surfusion : la température remonte brutalement à 0 °C et la goutte est partiellement solidifiée (phénomène également brutal).

3) Moyennant des hypothèses que vous expliciterez, calculer la fraction x de liquide restant à solidifier après la rupture de la surfusion.

Correction

On suppose la transformation adiabatique car brutale (les échanges de chaleur n'ont pas le temps de ce faire). La goutte subit les transformations suivantes :

[1] l'eau liquide passe de −5 °C à 0 °C (on note dans la suite $\Delta T = 5$ °C la variation de température) ;

[2] une masse $(1-x)\,m$ se solidifie (avec m la masse totale de la goutte).

Le premier principe donne :

$$\Delta H = 0 = \Delta H_1 + \Delta H_2$$

Avec :

$$\Delta H_1 = c_\ell m \Delta T \quad \text{et} \quad \Delta H_2 = -\,(1-x)\,m\ell_{fus}$$

Ainsi,

$$\boxed{x = 1 - \frac{c_\ell \Delta T}{\ell_{fus}} = 94\ \%}$$

4) Calculer le temps nécessaire à la solidification du reste de l'eau liquide.

Correction

On applique le premier principe enthalpique entre l'état précédent et l'état où toute la goutte s'est solidifiée. Il reste donc une masse xm à solidifier.

$$\Delta H = -xm\ell_{fus} = -hS\left(T_{fus} - T_e\right)\ \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{x\rho R\ell_{fus}}{3h\left(T_{fus} - T_e\right)} = 21\ \mathrm{s}}$$