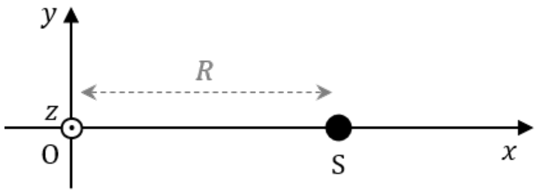
Stabilisation d'un satellite par gradient de gravité

On considère un satellite S (supposé ponctuel) de masse m qui suit une orbite circulaire de rayon R autour un astre (supposé ponctuel) de centre O et de masse M. On définit le repère (Oxyz) qui tourne à la même vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega} = \omega \overrightarrow{u_z}$ (avec $\omega > 0$) que le satellite, de sorte de S appartienne toujours à l'axe (Ox). On note $\mathcal{R}$ ce référentiel, non galiléen.



1) Déterminer la relation entre ω, R, G (la constante universelle de gravitation) et M. Quel est le nom de la loi associée à cette relation ?

Correction

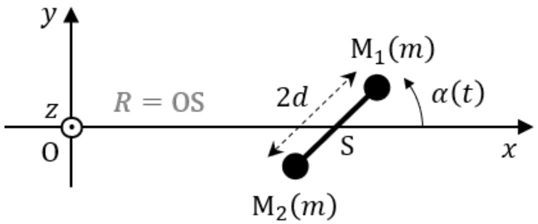
Le satellite S est immobile dans $\mathcal{R}$ car le point S se situe sur l'axe (Ox) à une distance fixe (R) de l'origine. Son accélération et donc nulle, la force d'inertie de Coriolis également. Le satellite est soumis à la force de gravitation et à la force d'inertie d'entraînement.

$$\overrightarrow{0} = -G\frac{mM}{R^2}\overrightarrow{u_x} + mR\omega^2\overrightarrow{u_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{GM}{R^3}}$$

Il s'agit de la troisième loi de Kepler.

La méthode de stabilisation par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVII$^{\text{e}}$, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

Le satellite est désormais constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masse identique m et reliés par une tige rigide de masse négligeable et de longueur $2d$. Le barycentre S du satellite décrit toujours autour de O une orbite circulaire de rayon R avec $R \gg d$ à la vitesse angulaire ω. Dans $\mathcal{R}$, le point S est donc toujours immobile, et les masses M_1 et M_2 peuvent tourner dans le plan orbital (Oxy), autour de S. On note α l'angle que fait le satellite avec l'axe (Ox) (cf. schéma).



2) Déterminer dans $\mathcal{R}$ le moment cinétique par rapport au point S du satellite, noté $\overrightarrow{L}_{sat}$.

Correction

Moment cinétique du satellite :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{L}_{sat} = \overrightarrow{L}_{\mathrm{M}_1} + \overrightarrow{L}_{\mathrm{M}_2} &= \overrightarrow{\mathrm{SM}_1} \wedge m\overrightarrow{v}_{\mathrm{M}_1} + \overrightarrow{\mathrm{SM}_2} \wedge m\overrightarrow{v}_{\mathrm{M}_2} \\ &= d\overrightarrow{u_r} \wedge md\dot{\alpha}\overrightarrow{u_\alpha} + (-d\overrightarrow{u_r}) \wedge m(-d\dot{\alpha}\overrightarrow{u_\alpha}) \\ &= \boxed{2md^2\dot{\alpha}\overrightarrow{u_z}}\end{aligned}$$

3) Donner l'expression des 3 forces extérieures que subissent chaque point M_i en fonction de m, ω, R, $\dot{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}$ et $\overrightarrow{\mathrm{SM}_i}$ uniquement.

Correction

Chaque point subit la force de gravitation de l'astre de masse M,

$$\overrightarrow{F_g} = -G\frac{mM}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}\right\|^3}\overrightarrow{\mathrm{OM}_i} = \boxed{-\frac{m\omega^2R^3}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}\right\|^3}\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}}$$

la force d'inertie d'entraînement et la force d'inertie de Coriolis :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{ie}} = m\omega^2\,\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F_{ic}} = -2m\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v}_{\mathrm{M}_i} = \boxed{2m\omega\dot{\alpha}\,\overrightarrow{\mathrm{SM}_i}}$$

4) L'une de ces forces possède un moment nul par rapport au point S. Laquelle ?

Correction

La force d'inertie de Coriolis possède un moment nul par rapport au point S. En effet :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{S}}\left(\overrightarrow{F_{ic}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{SM}_i} \wedge \overrightarrow{F_{ic}} = \overrightarrow{0}$$

5) Déterminer les expressions de $\overrightarrow{\mathrm{OM}_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}_2}$ en fonction de R, d, α, $\overrightarrow{u}_x$ et $\overrightarrow{u}_y$. Montrer qu'un développement limité au premier ordre en $d \ll R$ permet de montrer que :

$$\mathrm{OM}_1 \simeq R + d\,\cos(\alpha) \quad \text{et} \quad \mathrm{OM}_2 \simeq R - d\,\cos(\alpha)$$

Correction

On a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OM}_1} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} + \overrightarrow{\mathrm{SM}_1} = R\overrightarrow{u}_x + d\Big[\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u}_x + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_y\Big] \\ \overrightarrow{\mathrm{OM}_2} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} + \overrightarrow{\mathrm{SM}_2} = R\overrightarrow{u}_x - d\Big[\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u}_x + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_y\Big] \end{cases}$$

On prend la norme ($+$ pour OM_1 et $-$ pour OM_2) :

$$\begin{aligned} \mathrm{OM}_i &= \Big[(R \pm d\,\cos(\alpha))^2 + (d\,\sin(\alpha))^2\Big]^{1/2} = \Big[R^2 \pm 2Rd\,\cos(\alpha) + d^2\Big]^{1/2} \\ &= R\left[1 \pm \frac{2d}{R}\cos(\alpha) + \frac{d^2}{R^2}\right]^{1/2} \simeq R\Big[1 \pm \underbrace{\frac{d}{R}\cos(\alpha)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\frac{d^2}{2R^2}}_{\text{ordre 2}}\Big] = \boxed{R \pm d\,\cos(\alpha)} \end{aligned}$$

6) En déduire l'expression au premier ordre de la résultante des deux forces de moment non nul par rapport au point S qui s'exercent sur M_i, en fonction de m, ω, d, α et $\overrightarrow{u}_x$.

Correction

Résultante de la force de gravitation et la force d'inertie d'entraînement :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F}_i &= m\omega^2\left[1 - \frac{R^3}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}\right\|^3}\right]\overrightarrow{\mathrm{OM}_i} \\ &\simeq m\omega^2\left[1 - \left(1 \pm \frac{d}{R}\cos(\alpha)\right)^{-3}\right] \times \left[\Big(R \pm d\,\cos(\alpha)\Big)\overrightarrow{u}_x \pm d\,\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_y\right] \\ &\simeq \pm\frac{3d}{R}\,m\omega^2\,\cos(\alpha) \times \left[\Big(R \pm d\,\cos(\alpha)\Big)\overrightarrow{u}_x \pm d\,\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_y\right] \\ &\simeq \boxed{\pm 3m\omega^2 d\,\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u}_x} \end{aligned}$$

7) Établir l'expression du moment résultant par rapport au point S, dans $\mathcal{R}$, de l'ensemble des forces extérieures, en fonction de m, ω, d, α et $\overrightarrow{u}_z$.

Correction

Moment de $\overrightarrow{F}_i$ par rapport au point S :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{S}}\left(\overrightarrow{F_i}\right) = \overrightarrow{\mathrm{SM}_i} \wedge \overrightarrow{F_i} = -3m\omega^2 d^2\,\cos(\alpha)\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_z$$

On en déduit le moment résultant par rapport au point S de l'ensemble des forces extérieures :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{S}}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{S}}\left(\overrightarrow{F_1}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{S}}\left(\overrightarrow{F_2}\right) = -6m\omega^2 d^2\,\cos(\alpha)\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u}_z}$$

8) Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\,\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 0$$

où ω_0 est à exprimer en fonction de ω.

Correction

Avec les questions 2 et 7, le TMC donne immédiatement :

$$2md^2\ddot{\alpha} = -6m\omega^2 d^2\,\cos(\alpha)\sin(\alpha)$$

On en déduit :

$$\boxed{\ddot{\alpha} + \omega_0^2\,\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \omega\sqrt{3}}$$

9) Déterminer les valeurs de α qui correspondent à une position d'équilibre et déterminer leur stabilité.

Correction

Par symétrie du satellite, on peut limiter l'étude à $\alpha \in [0\,;\pi[$. Les positions d'équilibre vérifient l'équation :

$$\sin(\alpha_{eq})\cos(\alpha_{eq}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha_{eq} = 0 \text{ et } \pi/2}$$

Pour déterminer la stabilité, on peut poser $\alpha = \alpha_{eq} + \varepsilon$ avec ε un infiniment petit d'ordre 1, puis regarder l'allure de l'ED.

$$\begin{cases} \alpha_{eq} = 0 \ \Rightarrow \ \ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \ \rightarrow \ \text{stable} \\ \alpha_{eq} = \dfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ \ddot{\varepsilon} - \omega_0^2 \varepsilon = 0 \ \rightarrow \ \text{instable} \end{cases}$$

10) Expliquer comment ce modèle permet d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

Correction

En ajoutant une force qui dissipe l'énergie (par exemple une force de friction), le système cherche toujours à converger ver sa position d'équilibre. Le satellite tend donc à ce stabiliser sur la position $\alpha = 0$ et présente alors toujours le même côté au point O.