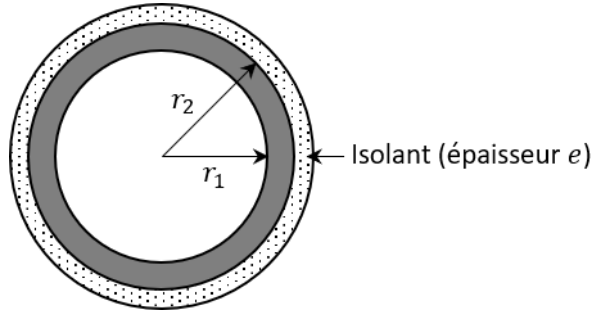


# ISOLATION D'UNE CANALISATION

On considère une conduite cylindrique en acier de rayon interne  $r_1 = 1,0$  cm, de rayon externe  $r_2 = 1,2$  cm et de longueur  $L = 5,0$  m. On note  $\lambda = 50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  la conductivité thermique de l'acier.



La conduite est rempli d'eau chaude à  $T_{int} = 80$  °C entre une chaudière et des radiateurs. L'air extérieur est à la température  $T_{ext} = 10$  °C. Enfin, cette canalisation est recouverte d'une couche d'isolant d'épaisseur  $e = 1,0$  cm et de conductivité thermique  $\lambda_i = 32 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

On se place en régime stationnaire.

1) On suppose que la température ne dépend que de  $r$ . Exprimer en fonction de  $T$  vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_{th}$ .

## Correction

Loi de Fourier :

$$\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{u}_r$$

2) Montrer que le flux thermique  $\phi_{th}$  est constant.

## Correction

En régime stationnaire, la variation d'énergie contenue dans une enveloppe cylindrique d'épaisseur  $dr$  pendant la durée  $dt$  est nulle :  $d^2H = 0$ . Ainsi, le transfert thermique sur cette enveloppe est nul :

$$d^2H = 0 = \phi(r) dt - \phi(r + dr) dt \Rightarrow \phi(r) = cte$$

3) Déterminer l'expression de la résistance thermique  $R_{th}$  d'une longueur  $L$  de canalisation ainsi que de la puissance totale  $\mathcal{P}$  perdue par la canalisation. Faire l'application

numérique.

## Correction

Flux thermique sortant d'un cylindre de rayon  $r$  et de longueur  $L$  :

$$\phi = j_{th} 2\pi r L = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L$$

On intègre cette expression entre deux rayons  $R_1$  et  $R_2$  :

$$dT = -\frac{\phi}{2\pi\lambda r L} dr \Rightarrow T_2 - T_1 = -\frac{\phi}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

On en déduit la résistance thermique en coordonnées cylindriques :

$$R = \frac{T_1 - T_2}{\phi} = \frac{\ln(R_2/R_1)}{2\pi\lambda L}$$

On somme (résistances en série) la résistances thermique de l'acier et de l'isolant.

$$R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \times \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + \frac{1}{2\pi\lambda_i L} \times \ln\left(\frac{r_2 + e}{r_2}\right) = 0,60 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$$

On en déduit finalement la puissance totale thermique totale s'échappant de la conduite :

$$\mathcal{P} = \phi = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th}} = 120 \text{ W}$$

4) Déterminer l'expression du profil de température  $T(r)$ .

## Correction

On repart de l'expression :

$$\mathcal{P} = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L$$

On intègre entre  $r_1$  et  $r \in [r_1; r_2]$  pour obtenir le profil de température dans l'acier.

$$dT = -\frac{\mathcal{P}}{2\pi\lambda r L} dr \Rightarrow T(r) - T_{int} = -\frac{\mathcal{P}}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right)$$

On intègre cette fois de  $r_2 + e$  et  $r \in [r_2; r_2 + e]$  pour obtenir le profil de température

dans l'isolant.

$$dT = -\frac{\mathcal{P}}{2\pi\lambda_i r L} dr \Rightarrow T(r) - T_{ext} = -\frac{\mathcal{P}}{2\pi\lambda_i L} \ln\left(\frac{r}{r_2 + e}\right)$$

Bilan :

$$T(r) = \begin{cases} T_{int} - \frac{\mathcal{P}}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) & \text{si : } r_1 \leq r \leq r_2 \\ T_{ext} + \frac{\mathcal{P}}{2\pi\lambda_i L} \ln\left(\frac{r_2 + e}{r}\right) & \text{si : } r_2 \leq r \leq r_2 + e \end{cases}$$

On peut alors en particulier déterminer avec les deux expressions la température au niveau du point de jonction.

$$T(r_2) = \frac{T_{ext} + uT_{int}}{1 + u} \quad \text{avec : } u = \frac{\lambda \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{\lambda_i \ln\left(\frac{r_2 + e}{r_2}\right)}$$

On tient désormais compte d'un coefficient de convection  $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  sur la surface extérieure de la couche d'isolant.

5) Déterminer la nouvelle résistance thermique  $R'_{th}$  totale de la conduite ainsi que de la nouvelle puissance totale  $\mathcal{P}'$  perdue par la canalisation. Faire l'application numérique.

#### Correction

On ajoute simplement la résistance thermique du transfert conducto-convectif qui vaut :

$$R_{cc} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{h2\pi(r_2 + e)L}$$

$$R'_{th} = R_{th} + \frac{1}{h2\pi(r_2 + e)L} = 0,75 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$$

On en déduit finalement la puissance totale thermique totale s'échappant de la conduite :

$$\mathcal{P}' = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R'_{th}} = 94 \text{ W}$$