Problème de Laplace en géométrie cylindrique

On considère un cylindre parfaitement conducteur d'axe (Oz) (le cylindre est infini selon z) et de rayon R maintenu au potentiel nul ($V=0$) et plongé dans un champ électrique extérieur uniforme $\overrightarrow{E_0} = E_0\,\overrightarrow{u_x}$.

Le conducteur étant parfait, le champ électrique doit nécessairement être nul dans ce dernier. Ainsi, une distribution surfacique de charge σ va apparaître sur la périphérie du cylindre, créant un champ électrique $\overrightarrow{E_c}$, de sorte que $\overrightarrow{E_{tot}} = \overrightarrow{E_0} + \overrightarrow{E_c} = \overrightarrow{0}$ dans le cylindre.

Dans cet exercice, on cherche à déterminer les expression du potentiel total $V_{tot}(\mathrm{M})$, du champ électrique total $\overrightarrow{E_{tot}}(\mathrm{M})$ pour tout M de l'espace, ainsi que la distribution de charge σ.

<u>Formulaire</u> : en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial A}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\Delta A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

1) Justifier que $V_{tot}(\mathrm{M}) = V_{tot}(r,\theta)$. Quelle relation existe-t-il entre $V_{tot}(r,\theta)$ et $V_{tot}(r,-\theta)$?

Correction

Le cylindre et le champ $\overrightarrow{E_0}$ possèdent tous les deux une invariance commune : l'invariance par translation selon z. Le problème est donc invariant par translation selon z. Donc :

$$\boxed{V_{tot}(\mathrm{M}) = V_{tot}(r,\theta)}$$

De plus, le plan (O,x,z) est un plan de symétrie du cylindre et du champ $\overrightarrow{E_0}$. Le plan est donc également un plan de symétrie de $\overrightarrow{E_{tot}}(\mathrm{M})$ et donc :

$$\boxed{V_{tot}(r,\theta) = V_{tot}(r,-\theta)}$$

2) Quelle est l'équation locale satisfaite par V_{tot} à l'extérieur du cylindre ?

Correction

Il n'y a aucune charge à l'extérieur du cylindre (vide). Donc :

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{E_{tot}}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{E_{tot}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V_{tot}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V_{tot} = 0}$$

Équation de Poisson.

On se propose de chercher une solution de la forme :

$$V_{tot}(r,\theta) = V_0 + f(r)\times g(\theta)$$

où V_0 est le potentiel créé par le champ $\overrightarrow{E_0}$.

3) Déterminer, à une constante près, la fonction $g(\theta)$.

Correction

On injecte la solution proposée dans l'équation de Poisson et on utilise le formulaire.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rf'g\right) + \frac{fg''}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f'g}{r} + f''g + \frac{fg''}{r^2} = 0$$

On peut séparer les variables :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rf'g\right) + \frac{fg''}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{rf'}{f} + \frac{r^2f''}{f}}_{\text{fonction de } r} = \underbrace{-\frac{g''}{g}}_{\text{fonction de } \theta} = K$$

Une fonction de r ne peut égale à une fonction de θ uniquement si ces deux fonctions sont constantes. On appelle K cette constante. Ainsi :

$$g'' + Kg = 0$$

La solution recherchée doit être 2π périodique (solution en cosinus / sinus avec une période de 2π) : on a donc nécessairement $K=1$. Enfin, on a montré à la première question que la solution étant paire. La solution s'écrit :

$$\boxed{g(\theta) = \cos(\theta)}$$

On pourrait ajouter une constante devant de cosinus, mais il est en réalité plus simple de cacher toutes les constantes dans la fonction $f(r)$.

4) Chercher $f(r)$ de la forme r^n. En déduire l'expression générale de $V_{tot}(r,\theta)$ (on fera apparaître des constantes que l'on déterminera dans la question suivante).

Correction

On injecte la forme proposée dans l'équation obtenue à la question précédente.

$$\frac{r f'}{f} + \frac{r^2 f''}{f} = 1 \quad \Rightarrow \quad n + n\,(n-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = \pm 1}$$

On peut multiplier chaque solution par une constante. On obtient donc la forme générale suivante :

$$\boxed{V_{tot}(r,\theta) = V_0 + \left[Ar + \frac{B}{r}\right]\cos(\theta)}$$

Au passage d'une interface d'un milieu 1 vers un milieu 2, le champ électrique doit vérifier la relation suivante :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ \overrightarrow{n}_{1\to 2}$$

où $\overrightarrow{n}_{1\to 2}$ est le vecteur unitaire normal à l'interface dirigé de 1 vers 2.

5) À l'aide des conditions aux limites, déterminer les constantes intervenant dans l'expression générale de $V_{tot}(r,\theta)$.

Correction

Si $r \to \infty$, alors $V_{tot} \to V_0$: très loin du cylindre, on n'est plus influencé par ce dernier. On en déduit : $\boxed{A = 0}$

Déterminons l'expression du champ $\overrightarrow{E}_{tot}$.

$$\overrightarrow{E_0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V_0) = E_0\,\overrightarrow{u}_x \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_0 = -E_0 x = -E_0 r\,\cos(\theta)}$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{E}_{tot} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V_{tot}) = \left[E_0 + \frac{B}{r^2}\right]\cos(\theta)\ \overrightarrow{u}_r - \left[E_0 - \frac{B}{r^2}\right]\sin(\theta)\ \overrightarrow{u}_\theta$$

On utilise finalement la relation de passage de l'interface avec 1 le milieu intérieur et 2 le milieu extérieur.

- $\overrightarrow{E_2} = \overrightarrow{E}_{tot}(r = R^+)$ est le champ à l'extérieur du cylindre que l'on vient de déterminer ;
- $\overrightarrow{E_1} = \overrightarrow{0}$ est le champ à l'intérieur du cylindre et l'énoncé précise qu'il est nul ;
- $\overrightarrow{n}_{1\to 2} = \overrightarrow{u}_r$ est le vecteur unitaire normal à l'interface.

On a donc :

$$\overrightarrow{E}_{tot}(r = R^+) = \left[E_0 + \frac{B}{R^2}\right]\cos(\theta)\ \overrightarrow{u}_r - \left[E_0 - \frac{B}{R^2}\right]\sin(\theta)\ \overrightarrow{u}_\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ \overrightarrow{u}_r$$

La projection de cette équation selon $\overrightarrow{u}_\theta$ donne :

$$-\left[E_0 - \frac{B}{R^2}\right]\sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = E_0 R^2}$$

Bilan :

$$\boxed{V_{tot}(r,\theta) = V_0 + \frac{E_0 R^2}{r}\cos(\theta)}$$

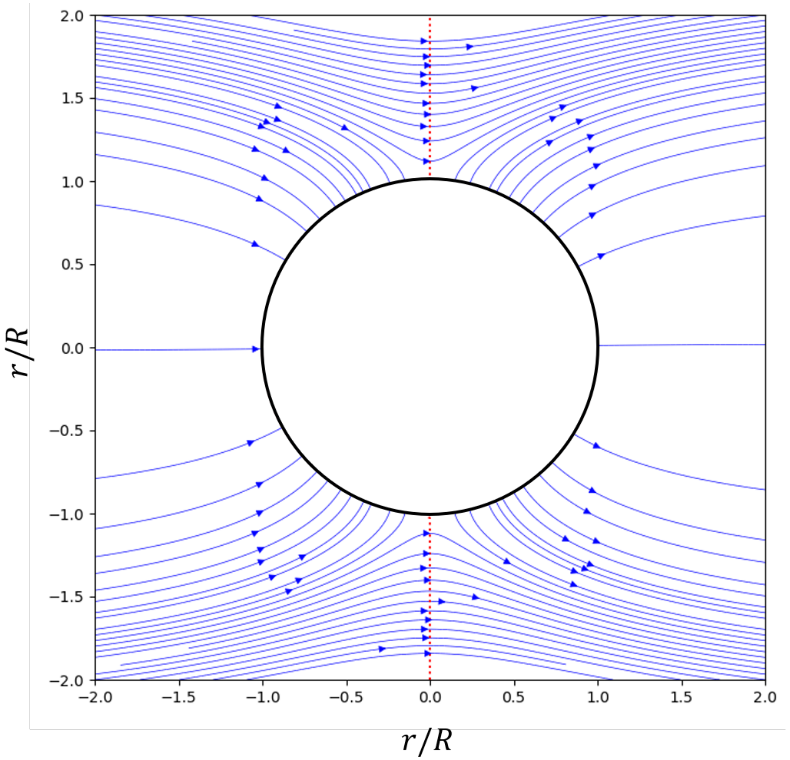
6) En déduire l'expression de $\overrightarrow{E}_{tot}(\mathrm{M})$ à l'extérieur du cylindre. Dessiner la carte de ligne de champ.

Correction

On a donc trouvé :

$$\boxed{\overrightarrow{E}_{tot} = E_0\left[1 + \frac{R^2}{r^2}\right]\cos(\theta)\ \overrightarrow{u}_r - E_0\left[1 - \frac{R^2}{r^2}\right]\sin(\theta)\ \overrightarrow{u}_\theta}$$

Graphiquement :



7) Déterminer l'expression de la distribution surfacique de charge σ.

Correction

La projection de la relation de passage selon $\overrightarrow{u_r}$ donne :

$$E_0\left[1+\frac{R^2}{r^2}\right]\cos(\theta)=\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma=E_0\varepsilon_0\left[1+\frac{R^2}{r^2}\right]\cos(\theta)}$$