

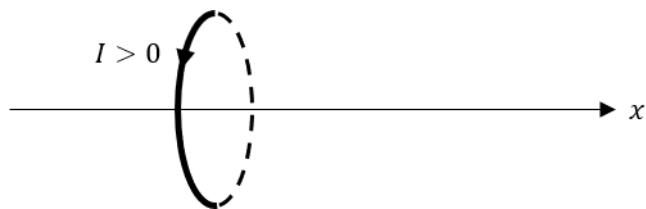
BOBINES DE HELMHOLTZ

Dans cet exercice, nous nous intéressons à la mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre, de norme B_H , grâce à un dispositif de type « bobines de Helmholtz » qui peut être réalisé facilement avec du matériel courant.

Une spire de rayon R , d'axe \vec{u}_x et située en $x = 0$ est parcourue par un courant électrique continu d'intensité I . Elle crée en un point M d'abscisse x de son axe un champ magnétique $\vec{B}_s(x)$ dont l'amplitude s'exprime par :

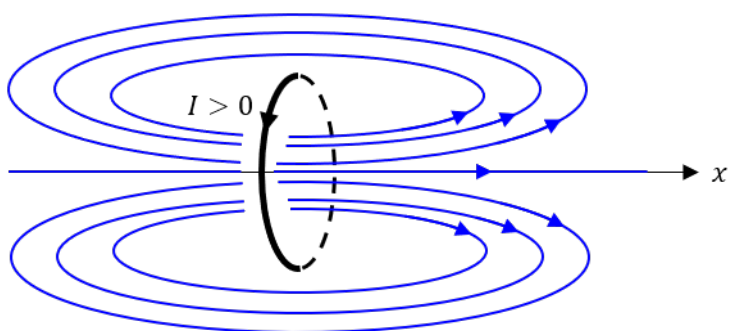
$$B_s(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{-3/2}$$

1) Tracer sur le schéma ci-dessous les lignes de champ magnétiques (en supposant que $I > 0$). En déduire l'expression vectorielle \vec{B}_s avec cette convention d'orientation.



Correction

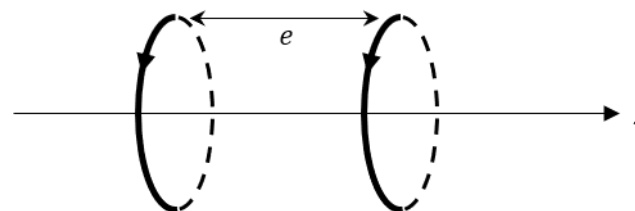
Carte de champ :



Ainsi,

$$\vec{B}_s(x) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2\right)^{-3/2} \vec{u}_x$$

On considère à présent deux bobines d'épaisseur négligeable, comprenant chacune N spires, d'axe commun, et parcourues par des courants de même sens et de même intensité et situées respectivement en $x = -e/2$ et $x = +e/2$.



2) Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_b(x)$ créé en un point M d'abscisse x .

Correction

Par linéarité (théorème de superposition), on a :

$$\vec{B}_b(x) = N \times \left[\vec{B}_s(x - e/2) + \vec{B}_s(x + e/2) \right]$$

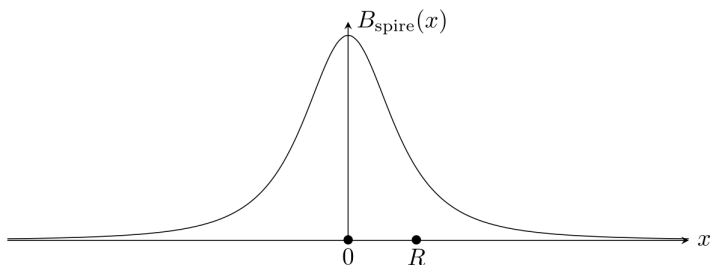
3) Tracer qualitativement l'amplitude $B_b(x)$ du champ $\vec{B}_b(x)$ en fonction de x , en faisant apparaître la contribution de chaque bobine. On distinguera différents cas selon que e est plus grand ou plus petit qu'une valeur critique e_0 (qu'on ne cherchera pas à déterminer). Quel est l'intérêt pratique du cas $e = e_0$?

Correction

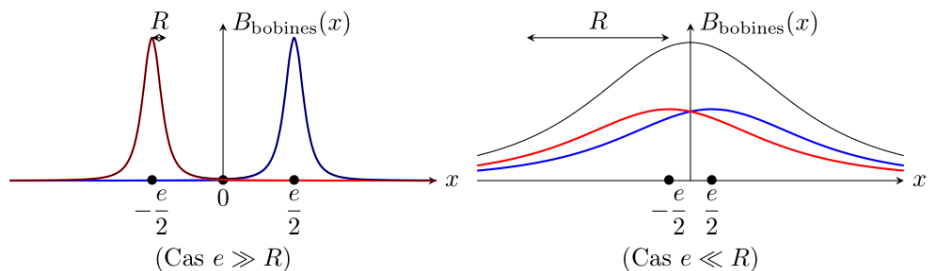
Ainsi,

$$B_b(x) = \frac{\mu_0 N I}{2R} \left[\left(1 + \left(\frac{x - e/2}{R}\right)^2\right)^{-3/2} + \left(1 + \left(\frac{x + e/2}{R}\right)^2\right)^{-3/2} \right]$$

Pour une spire, la fonction est symétrique, centrée en zéro, maximale en $x = 0$ et tend vers zéro en $x = \pm\infty$ et la largeur de la courbe est de l'ordre de R :



On distingue ainsi deux cas, suivant si les fonctions peuvent se superposer ou pas, ce qui correspond aux cas $e \ll e_0$ (cas d'une superposition complète, c'est comme si on avait une seule bobine en $x = 0$) ou $e \gg e_0$ (pas de superposition – séparation totale des deux champs). On note que forcément alors $e \sim R$, c'est la seule échelle de longueur caractéristique du problème.

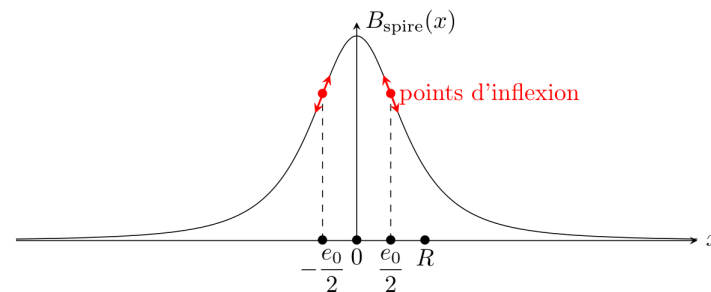


L'intérêt pratique du cas $e \simeq e_0$ est d'avoir un cas intermédiaire utile : les deux champs se superposent et il y a de la place entre les deux bobines pour pouvoir y mettre des systèmes sensibles au champ magnétique. On démontre à la question suivante que le champ est relativement uniforme entre les deux bobines.

4) À partir de l'étude de la courbe $B_s(x)$ et de l'observation de ses points d'inflexion, justifier sans aucun calcul que, pour cette valeur particulière e_0 de e , la fonction $B_b(x)$ puisse être considérée comme constante à l'ordre 3 au voisinage de 0. On ne cherchera pas à calculer e_0 , mais uniquement à décrire les variations de $B_b(x)$ au voisinage de 0 pour $e = e_0$.

Correction

Pour une courbe $B_s(x)$, il existe deux points d'inflexion répartis symétriquement autour de $x = 0$

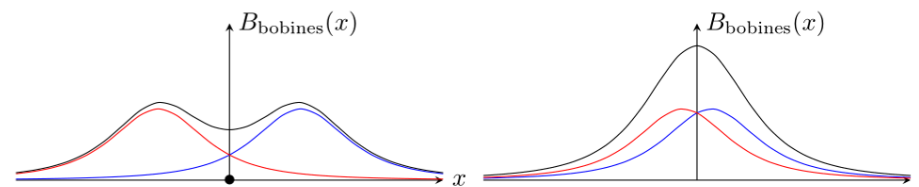


La courbe $B_s(x)$ est paire, donc toutes ses dérivées impaires en $x = 0$ sont nulles. En particulier, les dérivées d'ordre 1 et 3 sont nulles.

De plus, il existe deux cas limites :

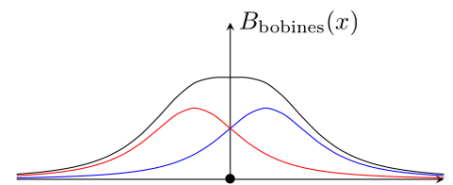
- existence d'un minimum de $B_b(x)$ en $x = 0$ (cas $e > e_0$), donc une dérivée seconde positive ;
- et existence d'un maximum de $B_b(x)$ en $x = 0$ (cas $e < e_0$), donc une dérivée seconde négative.

On a forcément un cas, pour un certain e que l'on identifie à e_0 , où la dérivée seconde de la fonction $B_b(x)$ est nulle en $x = 0$.



Cas $e > e_0$ minimum en $x = 0$

Cas $e < e_0$ maximum en $x = 0$



Cas $e = e_0 (= R)$ inflexion en $x = 0$

Ainsi, pour cette valeur de $e = e_0$, le développement de Taylor de la courbe en $x = 0$

est nécessairement :

$$B_b(x) = B_0 + \mathcal{O}(x^4) \quad \text{avec : } B_0 = B_b(x=0)$$

C'est-à-dire que la courbe est constante à l'ordre 3.

On admet que $e_0 = R$. On positionne les bobines de façon à ce que $e = e_0$. En $x = 0$, on place une petite boussole constituée d'une aiguille aimantée susceptible de tourner librement autour d'un axe vertical passant par son milieu. La norme du moment magnétique de cette aiguille est notée μ et on note J son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation.

L'axe des bobines est aligné avec les lignes de champ de la composante horizontale du champ magnétique terrestre de telle sorte qu'en $x = 0$, l'amplitude B_{tot} du champ magnétique total s'écrit $B_{tot} = B_0 + B_H$ avec $B_0 = B_b(x=0)$.

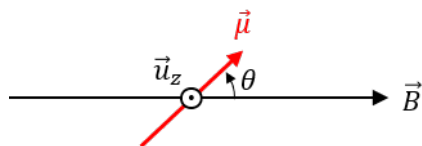
5) Rappeler l'expression du moment $\vec{\Gamma}$ du couple subit par un dipôle magnétique de moment $\vec{\mu}$ plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B} . En déduire la position d'équilibre stable de l'aiguille.

Correction

On rappelle l'expression du moment $\vec{\Gamma}$ du couple subit par un dipôle magnétique de moment $\vec{\mu}$ plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme \vec{B} .

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

Schéma :



D'après le TMC à l'équilibre (dans le référentielle terrestre supposé galiléen, le couple de la liaison pivot est nul car pas de frottement, le moment du poids est nul) :

$$\vec{0} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} = -\mu B \sin(\theta) \vec{u}_z$$

Les positions d'équilibre sont donc $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

De plus, en posant $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$ où $\varepsilon \ll 1$ rad, le TMC donne :

$$\begin{cases} \theta_{eq} = 0 \rightarrow J\ddot{\varepsilon} = -\mu B \varepsilon \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{\mu B}{J} \varepsilon = 0 \\ \theta_{eq} = \pi \rightarrow J\ddot{\varepsilon} = \mu B \varepsilon \Rightarrow \ddot{\varepsilon} - \frac{\mu B}{J} \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Le cas $\theta_{eq} = 0$ correspond à équilibre stable (ED d'oscillateur harmonique) et le cas $\theta_{eq} = \pi$ correspond à équilibre instable (solution de l'ED divergente).

6) On appelle T_1 la période des petites oscillations de l'aiguille par rapport à sa position d'équilibre. Montrer que T_1 peut s'exprimer en fonction de J , B_0 , B_H et μ . On justifiera les différentes hypothèses simplificatrices.

Correction

D'après la question précédente, les petites oscillations autour de la position d'équilibre stable se font avec un pulsation caractéristique :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu(B_H + B_0)}{J}} \Rightarrow T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mu(B_H + B_0)}}$$

7) On appelle T_2 la période des petites oscillations de l'aiguille lorsque le sens du courant dans les bobines est inversé par rapport à la question précédente. Exprimer B_H en fonction de T_1/T_2 . Préciser l'intérêt de la méthode.

Correction

L'inversion du sens du courant change uniquement la valeur du champ magnétique extérieur (B_0) appliqué à la boussole, mais pas le champ magnétique terrestre (B_H). Ainsi :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mu(B_H + B_0)}} \quad \text{et} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mu(B_H - B_0)}}$$

On en déduit donc :

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{B_H - B_0}{B_H + B_0}} \Rightarrow B_H = \frac{1 + (T_1/T_2)^2}{1 - (T_1/T_2)^2} B_0$$

L'intérêt de cette expérience est d'une part d'avoir une mesure du champ B_H en le comparant à un champ B_0 créé par l'expérimentateur et en ne mesurant que des temps : le résultat ne dépend pas de J et μ plus difficiles à mesurer. D'autre part, la

mesure du temps est assez précise, le contrôle de B_0 aussi dans la configuration dite de Helmholtz $e = R$ (où il est constant, où il y a de la place pour mesurer, et dont on connaît l'expression). De plus, dans cette expérience, l'alignement initial du dispositif avec le nord est assez facile à réaliser en coupant le courant dans les bobines ou en vérifiant que la position d'équilibre est bien dans l'axe des bobines.