Paquet d'onde bichromatique

On considère le paquet d'onde constitué de deux OPPH d'amplitude E_0, polarisées suivant $\overrightarrow{u_x}$, se propageant suivant les z croissants, de pulsations respectives ω_1 et ω_2, et de vecteur d'onde k_1 et k_2.

1) Écrire l'amplitude du champ $\underline{\overrightarrow{E_p}}$ du paquet d'onde.

Correction

Les deux champs électriques s'écrivent :

$$\underline{\overrightarrow{E_1}} = E_0 \; e^{i[\omega_1 t - k_1 z]} \overrightarrow{u_x} \quad \text{et} \quad \underline{\overrightarrow{E_2}} = E_0 \; e^{i[\omega_2 t - k_2 z]} \overrightarrow{u_x}$$

Par superposition :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E_p}} = \underline{\overrightarrow{E_1}} + \underline{\overrightarrow{E_2}} = E_0 \left(e^{i[\omega_1 t - k_1 z]} + e^{i[\omega_2 t - k_2 z]} \right) \overrightarrow{u_x}}$$

On suppose que les pulsations ω_1 et ω_2 sont très proches. On note :

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \delta\omega = \omega_1 - \omega_2$$

On note de plus : $k_0 = k(\omega_0)$

2) En déduire une relation entre k_1, k_0, $\delta\omega$ et $\left.\dfrac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0}$.

Correction

On effectue un développement limité de $k(\omega)$ autour de ω_0.

$$\boxed{k_1 = k\left(\omega_0 + \frac{\delta\omega}{2}\right) \simeq k_0 + \frac{\delta\omega}{2} \times \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0}}$$

Il en va de même pour k_2 :

$$\boxed{k_2 = k\left(\omega_0 - \frac{\delta\omega}{2}\right) \simeq k_0 - \frac{\delta\omega}{2} \times \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0}}$$

3) Montrer que l'amplitude du paquet d'onde peut alors s'écrire sous la forme :

$$\overrightarrow{E_p} = 2E_0 \, \cos\left(\omega_0 \left[t - \frac{z}{v_\varphi}\right]\right) \cos\left(\frac{\delta\omega}{2} \left[t - \frac{z}{v_g}\right]\right) \overrightarrow{u_x}$$

avec v_φ et v_g dont on donnera l'expression et une interprétation physique.

Correction

Posons pour alléger les calculs (et parce qu'on connaît la réponse) :

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_0} \quad \text{et} \quad v_g = \left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega_0}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \omega_1 t - k_1 z = \left(\omega_0 + \dfrac{\delta\omega}{2}\right) t - \left(k_0 + \dfrac{\delta\omega}{2}\, v_g\right) z = \omega_0 \left[t - \dfrac{z}{v_\varphi}\right] + \dfrac{\delta\omega}{2} \left[t - \dfrac{z}{v_g}\right] \\ \omega_2 t - k_2 z = \left(\omega_0 - \dfrac{\delta\omega}{2}\right) t - \left(k_0 - \dfrac{\delta\omega}{2}\, v_g\right) z = \omega_0 \left[t - \dfrac{z}{v_\varphi}\right] - \dfrac{\delta\omega}{2} \left[t - \dfrac{z}{v_g}\right] \end{cases}$$

Notons :

$$\phi_0 = \omega_0 \left[t - \frac{z}{v_\varphi}\right] \quad \text{et} \quad \phi_1 = \frac{\delta\omega}{2} \left[t - \frac{z}{v_g}\right]$$

Le champ résultant vaut :

$$\underline{\overrightarrow{E_p}} = E_0 \left(e^{i[\phi_0 + \phi_1]} + e^{i[\phi_0 - \phi_1]} \right) \overrightarrow{u_x} = 2E_0 \, \cos(\phi_1) \, e^{i\phi_0} \overrightarrow{u_x}$$

On repasse en notation réelle, et on obtient l'expression demandée :

$$\boxed{\overrightarrow{E_p} = 2E_0 \, \cos(\phi_1) \cos(\phi_0) \, \overrightarrow{u_x}}$$