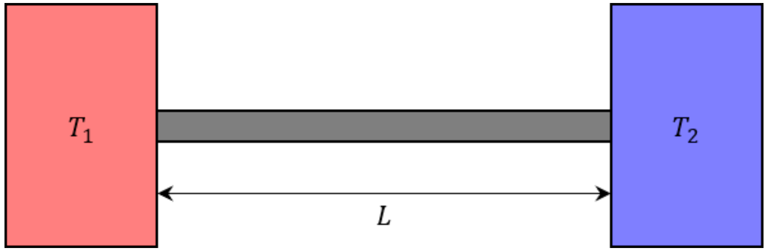
ARQS thermique dans une barre

On s'intéresse à une barre de section S de longueur L de capacité thermique massique c, de conductivité thermique λ qui relie deux thermostats de capacité thermique C. Cette barre est calorifugée sur ses parois latérales. Les thermostats sont calorifugés partout sauf au contact de la barre. On note $T_1(t)$ et $T_2(t)$ les températures dans chaque thermostat.



1) Établir l'équation d'évolution de la température dans la barre. La résoudre en régime stationnaire : on notera T_1 et T_2 les températures des thermostats.

Correction

On applique le premier principe sur un tranche de barre de longueur dx.

$$d^2H = \rho c S dx\big[T(x,t+dt) - T(x,t)\big] = \big[j_{th}(x,t) - j_{th}(x+dx,t)\big]Sdt$$

Ainsi,

$$\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{th}}{\partial x}$$

Avec la loi de Fourier :

$$\boxed{\rho c\,\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

En régime stationnaire :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(x) = T_1 + (T_2 - T_1)\,\frac{x}{L}}$$

2) Établir les équations différentielles vérifiées par $T_1(t)$ et $T_2(t)$ en supposant que le régime stationnaire dans la barre est constamment vérifié (hypothèse 1).

Correction

On applique le premier principe sur le thermostat 1. Il reçoit un flux thermique $\phi_{barre\to 1}$ de la barre.

$$dH = CdT_1 = \phi_{barre\to 1}dt = -j_{th}(x=0)\,Sdt = \lambda\,\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} Sdt = (T_2 - T_1)\,\frac{\lambda}{L}Sdt$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{dT_1}{dt} + (T_1 - T_2)\,\frac{S\lambda}{CL} = 0}$$

De même, en inversant les indices :

$$\boxed{\frac{dT_2}{dt} + (T_2 - T_1)\,\frac{S\lambda}{CL} = 0}$$

3) Résoudre ce système d'équation. On notera T_{01} et T_{02} les températures initiales des thermostats. On introduira un temps caractéristique τ.

Correction

La somme donne :

$$\frac{d}{dt}\Big(T_1 + T_2\Big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1 + T_2 = T_{01} + T_{02}}$$

On injecte cette relation dans l'ED sur T_1.

$$\frac{dT_1}{dt} + \frac{T_1}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{CL}{2S\lambda} \quad \text{et} \quad T_\infty = \frac{T_{01} + T_{02}}{2}$$

On en déduit :

$$\boxed{T_1(t) = T_\infty + (T_{01} - T_\infty)\,e^{-t/\tau} = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} + \frac{T_{01} - T_{02}}{2}\;e^{-t/\tau}}$$

On en déduit alors T_2 :

$$\boxed{T_2(t) = T_\infty + (T_{02} - T_\infty)\,e^{-t/\tau} = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} + \frac{T_{02} - T_{01}}{2}\;e^{-t/\tau}}$$

4) À quelle condition, l'hypothèse 1 est-elle judicieuse ?

Correction

Cette hypothèse est valable tant que le temps caractéristique d'évolution des thermostats (τ) est très petit devant de temps caractéristique du phénomène de diffusion thermique, qui s'obtient à partir du coefficient de diffusion :

$$D = \frac{\lambda}{\rho c} \sim \frac{L^2}{\tau_{diff}}$$

Ainsi,

$$\frac{CL}{2S\lambda} \ll \frac{L^2 \rho c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C \gg 2\rho c S L}$$

La capacité thermique du thermostat doit être très grande devant la capacité thermique de la barre.