

DURÉE D'UNE PLONGÉE

Un plongeur est équipé de sa combinaison. On note $T_e = 15\text{ °C}$ la température de l'eau environnante, uniforme est constante. La température initiale du plongeur est $T_0 = 37\text{ °C}$.

- Données :**
- Masse du plongeur $m = 75\text{ kg}$
 - Constante de Stefan $\sigma = 5,7 \times 10^{-8}\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
 - Coefficient de Newton $h = 10\text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
 - Épaisseur de la combinaison $e = 3\text{ mm}$
 - Surface de la combinaison $S = 1,3\text{ m}^2$
 - Conductivité thermique (combinaison) $\lambda = 4,4 \times 10^{-2}\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
 - Résistance thermique de la peau $R_{\text{peau}} = 3,0 \times 10^{-2}\text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$
 - Capacité thermique massique (eau) $c = 4,2\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

1) Rappeler l'expression de la résistance thermique dans le cas d'une couche de surface S , d'épaisseur e et de conductivité thermique λ .

Correction

On a :

$$R_{th} = \frac{e}{\lambda S} \Rightarrow R_{combi} = \frac{e}{\lambda S} = 5,24 \times 10^{-2}\text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

2) On modélise les pertes par convection par un flux thermique $\phi_c = Sh(T - T_e)$. Quelle résistance R_c peut-on associer aux pertes par convection ?

Correction

Par définition :

$$R_c = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{1}{Sh} = 7,69 \times 10^{-2}\text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

On modélise les pertes par rayonnement par un flux $\phi_r = S\sigma(T^4 - T_e^4)$, où σ est la constante de Stefan. On suppose que $|T - T_e| \ll T_e$.

3) Montrer que l'on peut associer aux pertes par rayonnement une résistance thermique R_r dont on déterminera l'expression.

Correction

On a :

$$\phi_r = S\sigma \left[(T - T_e + T_e)^4 - T_e^4 \right] = S\sigma \left[(1 + \varepsilon)^4 - 1 \right] T_e^4 \quad \text{avec : } \varepsilon = \frac{T - T_e}{T_e} \ll 1$$

On fait un développement limité :

$$\phi_r \simeq S\sigma [1 + 4\varepsilon - 1] T_e^4 = 4S\sigma T_e^3 (T - T_e)$$

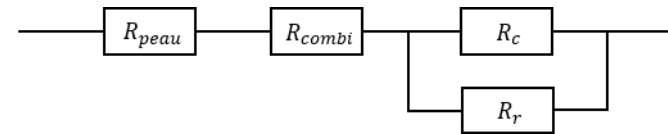
On en déduit la résistance thermique :

$$R_r = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{1}{4S\sigma T_e^3} = 14,1 \times 10^{-2}\text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

4) Quelle est alors la résistance thermique R_T équivalente à l'ensemble, en fonction de R_c , R_r , R_{peau} et R_{combi} ?

Correction

Les résistances sont associées comme indiqué ci-dessous. En effet, après avoir traversée la peau et la combinaison, l'énergie thermique peut être perdue par convection et, en parallèle, par rayonnement.



On en déduit :

$$R_T = R_{\text{peau}} + R_{\text{combi}} + \left(\frac{1}{R_c} + \frac{1}{R_r} \right)^{-1} = 13,2 \times 10^{-2}\text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

5) Justifier que l'on puisse se placer dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Pour cela, on déterminera un temps caractéristique de diffusion que l'on comparera au temps de plongée.

Correction

La coefficient de diffusion thermique (de diffusivité thermique) vaut, en ordre grandeur :

$$D_{th} = \frac{\lambda}{\rho c} \sim \frac{4 \times 10^{-2}}{10^3 \times 4 \times 10^2} \sim 10^{-7}\text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

Toujours en ordre de grandeur :

$$D_{th} \sim \frac{e^2}{\tau_{diffusion}} \Rightarrow \tau_{diffusion} \sim 10^2 \text{ s}$$

Or, une plongée dure en général plus de 20 minutes. Donc :

$$\tau_{plongée} > 10^3 \text{ s}$$

On en déduit que le temps caractéristique de plongée est très grand devant de temps caractéristique de diffusion thermique à travers la combinaison. La température sous la peau peut donc être vue comme une fonction lentement variables dans le temps (ARQS).

6) Établir l'équation différentielle vérifiée par la température du plongeur $T(t)$ sachant que la puissance thermique produite par le métabolisme humain est $\mathcal{P} = 120 \text{ W}$.

Correction

On applique le premier principe (version enthalpique car pression extérieure constante; version infinitésimale) sur le plongeur. On assimile la capacité thermique du plongeur à celle de l'eau.

$$dH = mc dT = (\mathcal{P} - \mathcal{P}_{perdue}) dt$$

On est en régime quasi-stationnaire, on peut donc exprimer la puissance thermique perdue \mathcal{P}_{perdue} à l'aide de la résistance thermique déterminée précédemment (cela n'aurait pas de sens en régime variable).

$$\mathcal{P}_{perdue} = \frac{T - T_e}{R_T}$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par la température sous la peau du plongeur :

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T}{\tau} = \frac{T_\infty}{\tau}$$

Avec :

$$\tau = mcR_T = 1,16 \times 10^4 \text{ s} \quad \text{et} \quad T_\infty = T_e + R_T \mathcal{P} = 30,9 \text{ }^\circ\text{C}$$

7) Au bout de combien de temps le plongeur est-il en hypothermie, c'est-à-dire que sa température corporelle est descendue en dessous à $35 \text{ }^\circ\text{C}$?

Correction

La solution s'écrit :

$$T(t) = (T_0 - T_\infty) e^{-t/\tau} + T_\infty \Rightarrow t = \tau \ln\left(\frac{T_0 - T_\infty}{T(t) - T_\infty}\right)$$

On en déduit le temps demandée :

$$t_{\text{hypo}} = \tau \ln\left(\frac{T_0 - T_\infty}{T_{\text{hypo}} - T_\infty}\right) = 1,64 \times 10^4 \text{ s} = 4,56 \text{ heures}$$