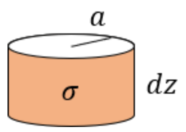
Ligne bifilaire

On considère une ligne bifilaire composée de 2 lignes chargés, parallèles, de longueur infinie, de rayon a et espacés de $2h$ (avec $h \gg a$). Les lignes sont chargées uniquement sur leur surface latérale : on donne σ la densité surfacique de charge.

1) On considère tout d'abord une seule ligne centrée sur (Oz). Exprimer λ, la densité linéique de charge de la ligne, en fonction de σ et a.

Correction

Schéma :



Une épaisseur dz de ligne contient la charge :

$$dq = \lambda\ dz = \sigma 2\pi a\ dz \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \sigma 2\pi a}$$

2) Déterminer le champ électrique $\vec{E}(\mathrm{M})$ crée par la ligne à l'extérieur ($r > a$), en fonction entre autres de σ.

Correction

On se place en coordonnées cylindres $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Soit un point $\mathrm{M} = (r, \theta, z)$ quelconque de l'espace.

La distribution de charge est invariante par translation selon $\vec{u}_z$ et par rotation autour de (Oz). Donc le champ électrique l'est également.

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \vec{E}(r)$$

Le plans $(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge. Donc $\vec{E}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = E(r)\, \vec{u}_r$$

On prend comme surface de Gauss un cylindre de hauteur h et de rayon r. Sa surface se décompose en trois parties : supérieure $\vec{dS}_{sup} = dS\,\vec{u}_z$, inférieure $\vec{dS}_{inf} = -dS\,\vec{u}_z$ et latérale $\vec{dS}_{lat} = dS\,\vec{u}_r$.

Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \vec{E}\cdot\vec{dS} = \underbrace{\iint_{S_{sup}} \vec{E}\cdot\vec{dS}_{sup}}_{=\ 0 \text{ car } \vec{E}\ \perp\ \vec{dS}_{sup}} + \underbrace{\iint_{S_{inf}} \vec{E}\cdot\vec{dS}_{inf}}_{=\ 0 \text{ car } \vec{E}\ \perp\ \vec{dS}_{inf}} + \iint_{S_{lat}} \vec{E}\cdot\vec{dS}_{lat} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

On rappelle que la surface latérale du cylindre vaut : $S_{lat} = 2\pi r h$

$$E(r) = \frac{\lambda h}{2\pi r h \varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}\,\vec{u}_r}$$

3) Déterminer le potentiel électrostatique V généré par la ligne à l'extérieur.

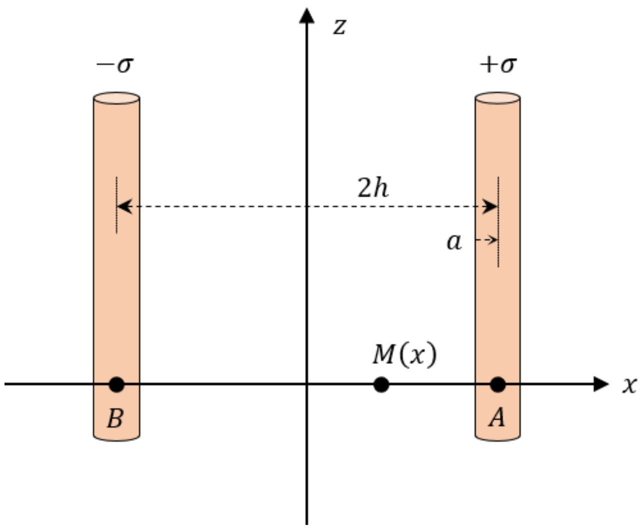
Correction

Avec ce qui précède, on a :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V) \quad \Rightarrow \quad E(r) = -\frac{dV}{dr} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(\mathrm{M}) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + cte}$$

et on peut choisir la constante d'intégration nulle.

On considère à présent les deux lignes. L'une possède une charge linéique $+\sigma$ et l'autre $-\sigma$. On travaillera dans le repère indiqué sur la figure ci-dessous.



4) Déterminer le potentiel électrostatique total V créé en un point x tel que $|x| < h - a$.

Correction

On note V_+ et V_- les potentiels créés par les lignes de charge respectivement $+\sigma$ et $-\sigma$. Attention, le r de la formule précédente représente la distance entre le point M et le centre de la ligne, on a donc :

$$V(\mathrm{M}) = V_+(\mathrm{M}) + V_-(\mathrm{M}) = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln(\mathrm{AM}) + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln(\mathrm{BM})$$

Avec le nouveau système de coordonnées et pour $|x| < h - a$, on a :

$$V(x) = -\frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln(h-x) + \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln(h+x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(x) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{h+x}{h-x}\right)}$$

5) En déduire la différence de potentielle, notée ΔV, entre les surfaces des deux lignes.

Correction

Par définition,

$$\Delta V = V(h-a) - V(-h+a) = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}\left[\ln\left(\frac{2h-a}{a}\right) - \ln\left(\frac{a}{2h-a}\right)\right]$$

Avec $h \gg a$, on a finalement :

$$\boxed{\Delta V = \frac{2\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2h}{a}\right)}$$

6) Déterminer la capacité par unité de longueur $\mathcal{C}$ de la ligne bifilaire.

Correction

On rappelle la relation entre q, C et ΔV pour un condensateur.

$$q = C\ \Delta V$$

Soit une portion dz de ligne. On a :

$$\lambda\ dz = \delta C \times \frac{2\sigma a}{\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2h}{a}\right)$$

On en déduit la capacité linéique de la ligne :

$$\boxed{\mathcal{C} = \frac{\delta C}{dz} = \frac{\pi\varepsilon_0}{\ln(2h/a)}}$$