Courants de Foucault dans un cylindre

On place un cylindre d'axe (Oz), de section $S_0 = \pi R^2$ de longueur L et de conductivité γ dans un champ magnétique extérieur uniforme variable $\overrightarrow{B} = B_0 \cos(\omega t)\, \overrightarrow{u_z}$. On suppose que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place en régime lentement variable et on néglige les effets de bords en considérant $L \gg R$.

On admet que : $\overrightarrow{E} = E(r,t)\, \overrightarrow{u_\theta}$

Formulaire : en coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{A}\right) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

1) Exprimer $E(r,t)$ en fonction de $B(t)$.

Correction

On utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} = B_0\omega\, \sin(\omega t)\, \overrightarrow{u_z}$$

On en déduit que $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right)$ est selon $\overrightarrow{u_z}$. Or, pour des raison de symétrie, $\overrightarrow{E}$ ne peut pas dépendre de la variable θ. On en déduit, à l'aide du formulaire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(rE_\theta\right)}{\partial r}\overrightarrow{u_z} = B_0\omega\, \sin(\omega t)\, \overrightarrow{u_z} \quad \Rightarrow \quad E_\theta = \frac{rB_0\omega}{2}\sin(\omega t)$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \frac{rB_0\omega}{2}\sin(\omega t)\, \overrightarrow{u_\theta}}$$

2) Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.

Correction

Puissance volumique moyenne :

$$\mathcal{P}_{vol} = \overrightarrow{j}\cdot\overrightarrow{E} = \gamma E^2 \quad \Rightarrow \quad \langle\mathcal{P}_{vol}\rangle = \gamma\left(\frac{rB_0\omega}{2}\right)^2 \times \langle\sin^2(\omega t)\rangle = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{rB_0\omega}{2}\right)^2$$

On intègre cette puissance moyenne :

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \iiint \langle\mathcal{P}_{vol}\rangle\, dV = \int_0^R \langle\mathcal{P}_{vol}\rangle \times 2\pi r L\, dr = \frac{\gamma}{2}\left(\frac{B_0\omega}{2}\right)^2 2\pi L \times \frac{R^4}{4}$$

On en déduit :

$$\boxed{\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\gamma B_0^2\omega^2 L S_0^2}{16\pi}}$$

3) Que devient la puissance moyenne dissipée par effet Joule si, au lieu d'un seul conducteur cylindrique, on utilise N conducteurs cylindriques identiques, de même longueur L, de section $S_0' = \dfrac{S_0}{N}$, sachant que le volume total occupé par les N cylindres est le même que précédemment ?

Correction

Dans le cas de N cylindres de section $S_0' = \dfrac{S_0}{N}$ la puissance moyenne dissipée est :

$$\boxed{\langle\mathcal{P}'\rangle = N \times \frac{\gamma B_0^2\omega^2 L}{16\pi}\left(\frac{S_0}{N}\right)^2 = \frac{\langle\mathcal{P}\rangle}{N}}$$

4) Expliquer l'intérêt du feuilletage (découper les conducteurs en sous conducteurs multibrins de plus petit diamètre) pour la réalisation des transformateurs.

Correction

Pour un même volume de matériau, on a N fois moins de puissance dissipée par effet Joule.