Déviation vers l'est

Du fait de la rotation de la Terre, les objets en chute libre sont déviés de la verticale au cours de leur chute. Ceci fut mis en évidence de manière expérimentale en 1833 par Ferdinand Reich (1799 - 1882), qui mesura la déviation sur une chute d'une hauteur de $h = 158$ m. Cet exercice est dédié à une étude simple de ce phénomène. On lâche sans vitesse initiale un objet M depuis le sol dans un puits de profondeur h, à partir d'un point situé à une latitude $\lambda = 51°$. On néglige les frottements, ainsi que les variations de l'accélération de la pesanteur avec l'altitude. En revanche, on tient compte de la rotation de la Terre, à la vitesse angulaire ω.

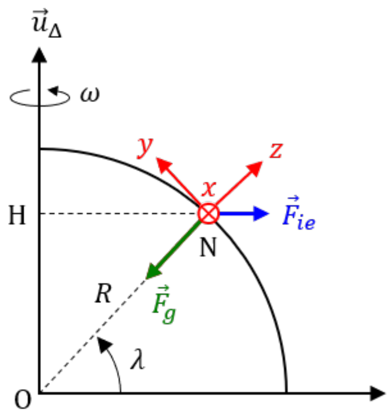
On rappelle que la force centrifuge est comptabilisée dans l'accélération de la pesanteur et ne doit pas être considérée comme une force supplémentaire.

Données : $\omega = 7{,}3 \times 10^{-5}$ rad $\cdot$ s^{-1} et $g = 9{,}8$ m $\cdot$ s^{-2}

1) Faire un schéma et dessiner la base cartésienne (Nxyz) où N correspond à la position de M à l'instant initial (au niveau de la surface de la Terre), (Nx) est dirigé vers l'est, (Ny) vers le nord et (Nz) vers le haut.

Correction

Schéma :



2) Faire le bilan des forces dans le référentiel terrestre non galiléen. Quelle est la force responsable d'une déviation par rapport à la verticale (Nz) ?

Correction

On applique le PFD au point M dans le référentiel (Nxyz) non galiléen. Le système est soumis à son poids et à la force de Coriolis.

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -g\end{pmatrix} - 2m\begin{pmatrix}0\\ \omega\cos(\lambda)\\ \omega\sin(\lambda)\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{cases}\ddot{x} = 2\omega\Big[\dot{y}\sin(\lambda) - \dot{z}\cos(\lambda)\Big]\\ \ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin(\lambda)\\ \ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\cos(\lambda)\end{cases}$$

C'est la force de Coriolis qui nous dévie de la chute verticale.

Afin de résoudre ce système d'équations, on prend une approche perturbative.

- Ordre 0 : on néglige le caractère non galiléen du référentiel d'étude (poser $\omega = 0$). On en déduit la vitesse $\vec{v}_0$ solution du système.
- Ordre $n \in \mathbb{N}^*$: on suppose que la vitesse dans l'expression de la force d'inertie de Coriolis vaut $\vec{v}_n$ tout au long de la chute. On en déduit la vitesse $\vec{v}_{n+1}$ solution du système.

3) Déterminer l'expression de $\vec{v}_0$.

Correction

À l'ordre 0 :

$$\begin{cases}\ddot{x}_0 = 0\\ \ddot{y}_0 = 0\\ \ddot{z}_0 = -g\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\dot{x}_0 = 0\\ \dot{y}_0 = 0\\ \dot{z}_0 = -gt\end{cases}}$$

4) Déterminer l'expression de $\vec{v}_1$. Dans quel sens a lieu la déviation ? Déterminer l'écart à la verticale pour l'expérience de Ferdinand Reich. Est-elle mesurable ?

Correction

À l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 2\omega\Big[\dot{y}_0\,\sin(\lambda) - \dot{z}_0\,\cos(\lambda)\Big] = 2\omega g t\,\cos(\lambda) \\ \ddot{y}_1 = -2\omega\dot{x}_0\,\sin(\lambda) = 0 \\ \ddot{z}_1 = -g + 2\omega\dot{x}_0\,\cos(\lambda) = -g \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega g t^2\,\cos(\lambda) \\ \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{z}_1 = -gt \end{cases}}$$

Puisque $\dot{x}_1 > 0$ (pour tout λ), la déviation a lieu vers l'**est**. Le vecteur position vaut :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\omega g t^3}{3}\,\cos(\lambda) \\ y_1 = 0 \\ z_1 = -\dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

On en déduit le temps t_c de chute puis l'écart Δx par rapport à la vertical au moment du contact avec le sol.

$$-h = -\frac{gt_c^2}{2} \quad \Rightarrow \quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = \frac{\omega g}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\cos(\lambda) = 2{,}7\ \text{cm}}$$

Cet écart est faible mais mesurable si on fait une grande série d'expériences puis une analyse statistique des résultats.

5) Déterminer l'expression de $\overrightarrow{v_2}$. Dans quel sens a lieu la déviation supplémentaire ? Déterminer l'écart à la l'ordre 1 pour l'expérience de Ferdinand Reich (on pourra négliger le terme de rang 2 dans le calcul du temps de chute). Est-elle mesurable ?

Correction

À l'ordre 2 :

$$\begin{cases} \ddot{x}_2 = 2\omega\Big[\dot{y}_1\,\sin(\lambda) - \dot{z}_1\,\cos(\lambda)\Big] = 2\omega g t\,\cos(\lambda) \\ \ddot{y}_2 = -2\omega\dot{x}_1\,\sin(\lambda) = -2\omega^2 g t^2\,\sin(\lambda)\cos(\lambda) \\ \ddot{z}_2 = -g + 2\omega\dot{x}_1\,\cos(\lambda) = -g + 2\omega^2 g t^2\,\cos^2(\lambda) \end{cases}$$

On en déduit les vecteurs vitesse puis position :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}_2 = \omega g t^2\,\cos(\lambda) \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{2\omega^2 g t^3}{3}\,\sin(\lambda)\cos(\lambda) \\ \dot{z}_2 = -gt + \dfrac{2\omega^2 g t^3}{3}\,\cos^2(\lambda) \end{cases}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{\omega g t^3}{3}\,\cos(\lambda) \\ y_2 = -\dfrac{\omega^2 g t^4}{6}\,\sin(\lambda)\cos(\lambda) \\ z_2 = -\dfrac{gt^2}{2} + \underbrace{\dfrac{\omega^2 g t^4}{6}\,\cos^2(\lambda)}_{\text{négligeable}} \end{cases}$$

Puisque $\dot{y}_2 < 0$ pour l'hémisphère nord ($\lambda > 0$), la déviation a lieu vers le **sud**. Inversement, $\dot{y}_2 > 0$ pour l'hémisphère sud ($\lambda < 0$), la déviation a lieu vers le **nord**.

On peut négliger le terme $\dfrac{\omega^2 g t^4}{6}\,\cos^2(\lambda)$ pour déterminer le temps de chute. On conserve donc le même temps de chute t_c puis l'écart Δy par rapport au cas précédent.

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta y = \frac{\omega^2 g}{6}\left(\frac{2h}{g}\right)^2\sin(\lambda)\cos(\lambda) = 4{,}4\ \mu\text{m}}$$

Cet écart est négligeable, on ne peut pas le mesurer. On peut en conséquence négliger tous les termes d'ordre supérieur.