Propagation à travers un morceau de scotch

Le Scotch est un milieu biréfringent, c'est-à-dire que son indice de réfraction n'est pas unique : il dépend de la direction de polarisation de l'onde lumineuse qui le traverse. Pour la suite, on considère un morceau de Scotch assimilé à une lame plane à faces parallèles, orthogonales à l'axe (Oz), d'épaisseur e. On envoie sur cette lame une onde lumineuse plane, progressive (selon $+\overrightarrow{u_z}$), monochromatique, polarisée rectilignement, et on admet que :

- pour une polarisation rectiligne selon $\overrightarrow{u_x}$, l'onde se propage à la vitesse $v_o = c/n_o$ dans la lame, sans changer de direction de polarisation ;
- pour une polarisation rectiligne selon $\overrightarrow{u_y}$, l'onde se propage à la vitesse $v_e = c/n_e$ dans la lame, avec $n_e = n_0 + \Delta n$, sans changer de direction de polarisation ;
- la pulsation temporelle ω ne varie pas quand l'onde passe d'un milieu à un autre. C'est la norme du vecteur d'onde qui s'adapte à la vitesse du milieu de propagation : $k = n\omega/c$.

Les axes (Ox) et (Oy) sont appelés lignes neutres de la lame.

L'origine de l'axe (Oz) est choisie au niveau de la face d'entrée de la lame. On néglige tout phénomène de réflexion partielle au niveau des faces de la lame.

En notation complexe, le champ électrique associé à l'onde incidente (dans le domaine $z < 0$) s'écrit :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(\mathrm{M}, t) = \overrightarrow{E_0}\ e^{i\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)}$$

où ω est la pulsation de l'onde et $\overrightarrow{E_0}$ un vecteur constant.

1) Exprimer le vecteur d'onde $\overrightarrow{k}$ correspondant à la situation étudiée. Justifier que les vecteurs $\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{E_0}$ sont nécessairement orthogonaux entre eux.

Correction

L'onde incidente se propage dans l'air, assimilé au vide, donc :

$$\boxed{\overrightarrow{k} = \frac{\omega}{c}\overrightarrow{u_z}} \quad \text{et} \quad \mathrm{div}\left(\overrightarrow{E}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{E}}$$

2) On suppose dans cette question que l'onde incidente est polarisée rectilignement selon $\overrightarrow{u_x}$. Expliciter, en notation complexe, le champ électrique associé à l'onde au niveau de la face de sortie de la lame (en $z = e$), puis en un point quelconque du domaine $z > e$.

Correction

Dans la lame pour la polarisation selon $\overrightarrow{u_x}$:

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E}}(z = e, t) = E_0\ \exp\left(i\left[\omega t - \frac{n_0 e\omega}{c}\right]\right)\overrightarrow{u_x} = E_0\ e^{-in_0 e\omega/c}\ e^{i\omega t}\overrightarrow{u_x}}$$

Pour $z > e$, le champ se propage de nouveau dans le vide et on doit avoir continuité en $z = e$, donc :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E}}(z > e, t) = E_0\ e^{-in_0 e\omega/c}\ e^{i\omega(t-(z-e)/c)}\overrightarrow{u_x}}$$

L'onde incidente est désormais polarisée rectilignement selon la première bissectrice des axes (Ox) et (Oy) :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(\mathrm{M}, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{u_y}\right) \quad \text{avec :} \quad E_0 = \left\|\overrightarrow{E_0}\right\|$$

3) En admettant que la biréfringence du Scotch est un phénomène linéaire, donner en notation complexe l'expression du champ électrique obtenu dans le domaine $z > e$.

Correction

De même (pour la question précédente), pour une polarisation selon $\overrightarrow{u_y}$, on aurait :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(z > e, t) = E_0\ e^{-in_e e\omega/c}\ e^{i\omega(t-(z-e)/c)}\overrightarrow{u_y}$$

La linéarité permet d'affirmer que la réponse à une somme (de champs) est la somme des réponses :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E}}(z > e, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\ e^{i\omega(t-(z-e)/c)}\left[e^{-in_o e\omega/c}\overrightarrow{u_x} + e^{-in_e e\omega/c}\overrightarrow{u_y}\right]}$$

4) Après avoir traversé la lame, l'onde est-elle toujours polarisée rectilignement ?

Correction

Après la lame, le champ n'est en général pas polarisé rectilignement. Le déphasage ϕ entre les coordonnées E_x et E_y ne permet pas d'isoler un vecteur constant qui serait colinéaire à $\overrightarrow{E}$.

En notation réelle :

$$\overrightarrow{E}(z>e,t)=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c}\cos\left(\omega t-\dfrac{\omega\left(z-e+n_o e\right)}{c}\right)\\ \cos\left(\omega t-\dfrac{\omega\left(z-e+n_e e\right)}{c}\right)\end{array}\right)=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c}\cos(\omega t')\\ \cos(\omega t'-\phi)\end{array}\right)$$

avec :

$$t'=t-\frac{z-e+n_o e}{c}\quad\text{et}\quad\phi=\frac{\left(n_e-n_o\right)\omega e}{c}$$

La formule précédente en t' est l'équation paramétrée d'une ellipse. L'extrémité du vecteur $\overrightarrow{E}(\mathrm{M})$, en un point M donné, décrit une ellipse. La polarisation est elliptique.

5) Montrer que, si $\Delta n\times e=p\lambda$ avec p un entier et λ la longueur d'onde de l'onde dans le vide, l'onde émergente est polarisée rectilignement dans la même direction que l'onde incidente.

Correction

On a :

$$\Delta n\times e=p\lambda=p\,\frac{2\pi c}{\omega}\quad\Rightarrow\quad\phi=2\pi p$$

Le déphasage entre les composantes E_x et E_y est alors nul. Ainsi :

$$\overrightarrow{E}(z>e,t)=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{c}\cos(\omega t')\\ \cos(\omega t')\end{array}\right)=\frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{u}_x+\overrightarrow{u}_y\right)$$

Le champ ne change pas de direction et reste polarisé rectilignement selon la bissectrice des axes.