Le long jeûne hivernal

Ce problème vous propose de réfléchir à l'aptitude du manchot empereur à jeûner l'hiver. On modélisera l'animal par un cylindre uniforme, enveloppé d'une couche de graisse de faible épaisseur devant sa taille. Bien que l'animal soit recouvert de plume jouant sur la convection, son rôle ne sera pas considéré. De plus, les transferts thermiques par rayonnement seront négligés.

Pendant l'hiver, le mâle, couve l'unique œuf. Il reste plusieurs mois sans manger, par une température de $T_e = -30$ °C, alors que sa température interne reste à $T_i = 38$ °C. La graisse, de conductivité thermique $\lambda = 0{,}17\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$, a deux fonctions : isoler thermiquement et procurer au manchot une énergie $h = 38\ \mathrm{MJ \cdot kg^{-1}}$ lorsqu'il la consomme. La masse volumique de cette graisse est la même que celle de l'animal, essentiellement constitué d'eau.

1) Considérant l'épaisseur de graisse constante dans le temps, évaluer l'épaisseur de graisse permettant au manchot de jeûner 2 mois dans ces conditions.

Correction

La première étape est de déterminer la résistance thermique de la couche de graisse, en géométrie cylindrique :

$$\phi = cte \quad \Rightarrow \quad \phi = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r L$$

avec L la hauteur du cylindre.

On intègre puis on trouve la résistance thermique :

$$dT = -\frac{\phi}{2\pi\lambda r L}\, dr \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 = -\frac{\phi_{1\to2}}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

On en déduit la résistance thermique :

$$R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi_{1\to2}} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

On applique ce résultat à la couche de graisse de rayon interne R et de rayon externe $R + e$ avec $e \ll R$.

$$R_{lat} = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln\left(\frac{R+e}{R}\right) \simeq \frac{e}{2\pi\lambda L R}$$

On a également les surfaces du haut et du bas du cylindre de rayon R.

$$R_{haut} = R_{bas} = \frac{e}{\lambda\pi R^2}$$

On en déduit la résistance thermique totale (toutes les résistances ont en dérivation) :

$$R_{th} = \left(\frac{1}{R_{haut}} + \frac{1}{R_{bas}} + \frac{1}{R_{lat}}\right)^{-1} = \frac{e}{2\pi\lambda R\,(R+L)}$$

En ordre de grandeur et en s'aidant de la photographie fournie dans l'énoncé, on peut prendre $L \simeq 4R$. Ainsi :

$$\boxed{R_{th} = \frac{e}{10\pi\lambda R^2}}$$

Ainsi la puissance thermique perdue par le le manchot est donc :

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{th}} \quad \text{avec :} \quad \Delta T = T_{int} - T_{ext}$$

Pour que le manchot survive, il faut que la couche de graisse lui fournisse une quantité d'énergie suffisante pour tout l'hiver. C'est à dire (posons $\tau = 2$ mois) :

$$\phi \times \tau < h \times m_{\text{graisse}}$$

où m_{graisse} est la masse de la couche de graisse :

$$m_{\text{graisse}} = \rho\left[2\pi R L e + \pi R^2 e + \pi R^2 e\right] = 10\pi R^2 e \rho$$

On trouve donc :

$$\frac{10\pi\lambda R^2 \tau \Delta T}{e} < 10\pi R^2 e h \rho \quad \Rightarrow \quad \boxed{e > e_{min} = \sqrt{\frac{\lambda\tau\Delta T}{h\rho}} = 4\ \text{cm}}$$

2) On considère maintenant que l'épaisseur de graisse varie au cours de sa consommation. Quelle épaisseur initiale de graisse le manchot doit-il disposer pour passer l'hiver ?

Correction

Le premier principe appliqué au système manchot (qui reste à température constante) sur une durée dt donne :

$$dH = 0 = \delta Q_{\text{graisse}} + \delta Q_{ext}$$

Le transfert thermique de la graisse s'exprime par

$$\delta Q_{\text{graisse}} = -h dm_{\text{graisse}} = -10\pi R^2 h\rho \, de$$

avec m_{graisse} déjà calculé dans la partie précédente. Notons que le transfert thermique est positif ($de < 0$) car c'est bien un apport d'énergie depuis la couche de graisse au système manchot.

Le transfert thermique vers l'extérieur est

$$\delta Q_{ext} = -\phi dt = -\frac{\Delta T}{R_{th}} \, dt = -\frac{10\pi\lambda R^2 \Delta T}{e} \, dt$$

nécessairement négatif car le manchot fuite thermiquement vers l'extérieur.

Ainsi, on obtient l'équation :

$$-10\pi R^2 h\rho \, de - \frac{10\pi\lambda R^2\Delta T}{e} \, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{e^2}{2}\right) = -\frac{\lambda\Delta T}{h\rho}$$

La solution est :

$$e(t) = \sqrt{e_0^2 - \frac{2\lambda\Delta T}{h\rho} \, t}$$

Prenons large... on veut que :

$$e(\tau) > e_{min} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{e_0^2 - \frac{2\lambda\tau\Delta T}{h\rho}} > e_{min}$$

On en déduit :

$$\boxed{e_0 > \sqrt{e_{min}^2 + \frac{2\lambda\tau\Delta T}{h\rho}} = e_{min} \times \sqrt{3} = 7 \text{ cm}}$$

Remarque : tous les calculs de cet exercice surestime d'un facteur 5 l'épaisseur réelle (1,2 cm) de la couche de graisse. Mais la couche de graisse n'est responsable qu'à 80 % de l'isolation du manchot... L'ordre de grandeur trouvé est donc très bon !