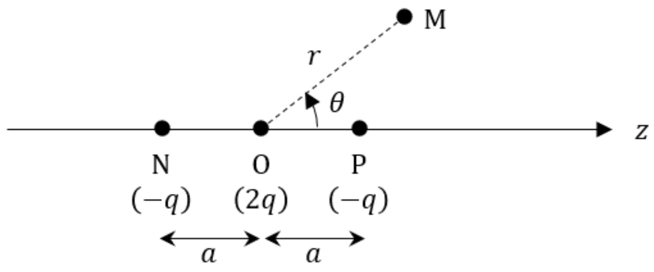
Quadripôle électrostatique

On considère un quadripôle électrostatique constitué d'une charge $-q$ placée en $-a$, une charge $2q$ placée en O et une autre charge $-q$ placée en $+a$. On repère le point M par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ).



Formulaire : en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{\text{grad}}(A) = \frac{\partial A}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r\,\sin(\theta)}\,\frac{\partial A}{\partial \varphi}\overrightarrow{u_\varphi}$$

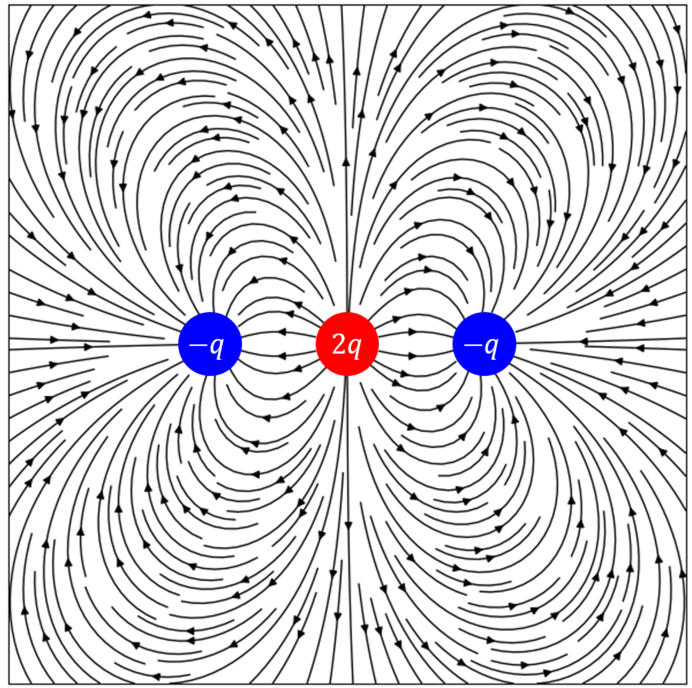
Pour $|\varepsilon| \ll 1$, on rappelle que :

$$(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2}\,\varepsilon^2$$

1) Donner l'allure des lignes de champ électrostatique.

Correction

Lignes de champ :



2) Calculer le potentiel puis le champ pour $r \gg a$.

Correction

On rappelle le potentiel créé par une charge ponctuelle :

$$V(\text{M}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \times \text{OM}}$$

Donc le potentiel créé par le quadripôle vaut :

$$V(\text{M}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{\text{OM}} - \frac{1}{\text{PM}} - \frac{1}{\text{NM}}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{\text{PM}} - \frac{1}{\text{NM}}\right]$$

Or,

$$\begin{aligned}
\text{PM}^2 &= \overrightarrow{\text{PM}}\cdot\overrightarrow{\text{PM}} \\
&= \left(\overrightarrow{\text{PO}} + \overrightarrow{\text{OM}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\text{PO}} + \overrightarrow{\text{OM}}\right) \\
&= \left(-a\,\overrightarrow{u_z} + r\,\overrightarrow{u_r}\right)\cdot\left(-a\,\overrightarrow{u_z} + r\,\overrightarrow{u_r}\right) \\
&= r^2 + a^2 - 2ra\,\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $r \gg a$, on a au second ordre :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{PM}} &= \frac{1}{r}\left[1-\frac{2a}{r}\,\cos(\theta)+\frac{a^2}{r^2}\right]^{-1/2} \\
&\simeq \frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(-\frac{2a}{r}\,\cos(\theta)+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{3}{8}\left(-\frac{2a}{r}\,\cos(\theta)\right)^2\right] \\
&\simeq \frac{1}{r}\left[1+\frac{a}{r}\,\cos(\theta)-\frac{a^2}{2r^2}+\frac{3a^2}{2r^2}\,\cos^2(\theta)\right]
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathrm{NM}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{NM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NM}} \\
&= \left(\overrightarrow{\mathrm{NO}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{NO}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \\
&= (a\,\overrightarrow{u}_z+r\,\overrightarrow{u}_r)\cdot(a\,\overrightarrow{u}_z+r\,\overrightarrow{u}_r) \\
&= r^2+a^2+2ra\,\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $r \gg a$, on a au second ordre :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{NM}} &= \frac{1}{r}\left[1+\frac{2a}{r}\,\cos(\theta)+\frac{a^2}{r^2}\right]^{-1/2} \\
&\simeq \frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{2a}{r}\,\cos(\theta)+\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{2a}{r}\,\cos(\theta)\right)^2\right] \\
&\simeq \frac{1}{r}\left[1-\frac{a}{r}\,\cos(\theta)-\frac{a^2}{2r^2}+\frac{3a^2}{2r^2}\,\cos^2(\theta)\right]
\end{aligned}$$

On injecte les relations dans l'expression de $V(\mathrm{M})$. On trouve après simplifications :

$$\boxed{V(\mathrm{M})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{a^2}{r^3}-\frac{3a^2}{r^3}\,\cos^2(\theta)\right]=\frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[1-3\,\cos^2(\theta)\right]}$$

On en déduit le champ électrique à l'aide du formulaire :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M})=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(V)=\frac{3qa^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4}\left[\left(1-3\,\cos^2(\theta)\right)\overrightarrow{u}_r-2\,\cos(\theta)\sin(\theta)\,\overrightarrow{u}_\theta\right]}$$