Onde longitudinale dans les plasmas

On considère la propagation d'une onde polarisée longitudinalement dans un plasma dilué de densité de charges constante n, c'est à dire une onde du type :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(x,t) = E_0 \; e^{i(\omega t - kx)} \overrightarrow{u_x}$$

1) Déterminer le champ magnétique.

Correction

On utilise Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{B} = \overrightarrow{cte} = \overrightarrow{0}}$$

On en déduit que le champ magnétique est une constante du temps. On cherche un champ sous la forme d'une onde donc les solutions constantes ne nous intéresse pas donc finalement $\overrightarrow{B}$ est nul.

2) Établir l'équation du mouvement d'un électron de masse m et de charge $-e$, associé à la densité n. Montrer que l'on peut définir une conductivité complexe $\underline{\gamma}$ pour le plasma.

Correction

On applique le PFD sur un électron, dans le référentiel des charges positives supposées fixes, le référentiel est donc supposé galiléen.

$$m\,\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = -e\overrightarrow{E} \quad \Rightarrow \quad i\omega m\underline{\overrightarrow{v}} = -e\underline{\overrightarrow{E}}$$

Or, par définition de la densité volumique de courant $\underline{\overrightarrow{j}}$ et de la conductivité $\underline{\gamma}$, on montre que :

$$\underline{\overrightarrow{j}} = -ne\underline{\overrightarrow{v}} = -\frac{ine^2}{m\omega}\underline{\overrightarrow{E}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\gamma} = -\frac{ine^2}{m\omega}}$$

3) À l'aide des équations de Maxwell et de l'équation locale de conservation de la charge, établir une nouvelle expression de $\underline{\gamma}$ en fonction de ω et ε_0.

Correction

Équation de conservation de la masse en complexe :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\overrightarrow{j}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad i\omega\underline{\rho} + \mathrm{div}\left(\underline{\overrightarrow{j}}\right) = 0$$

En introduisant $\underline{\gamma}$ et champ l'équation de Maxwell-Gauss :

$$i\omega\underline{\rho} + \underline{\gamma}\;\mathrm{div}\left(\underline{\overrightarrow{E}}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad i\omega\underline{\rho} + \frac{\underline{\gamma}\underline{\rho}}{\varepsilon_0} = 0$$

On en déduit :

$$\left(i\omega + \frac{\underline{\gamma}}{\varepsilon_0}\right)\underline{\rho} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\gamma} = -i\omega\varepsilon_0}$$

4) Déterminer la pulsation ω de cette onde.

Correction

On égalise ces deux expressions :

$$-i\omega\varepsilon_0 = -\frac{ine^2}{m\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} = \omega_p}$$

La pulsation de cette onde est nécessairement égale à la pulsation plasma.

5) Calculer la vitesse de groupe. Conclure.

Correction

Comme la relation de dispersion ne fait pas intervenir k, la vitesse de groupe est nulle, il n'y a pas de propagation de l'énergie pour une onde longitudinale dans un plasma dilué.

6) Calculer le vecteur de Poynting et évaluer l'énergie électromagnétique volumique. L'énergie électromagnétique trouvée oscille dans le temps. Sous quelle forme est l'énergie lorsque elle n'est pas sous forme électromagnétique ?

Correction

Comme le champ magnétique est nul, le vecteur de Poynting est nul.

Donc l'énergie électromagnétique ne se propage pas. L'énergie électromagnétique, elle, provient du champ électrique :

$$\boxed{u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\;\cos^2(\omega t - kx)}$$

Quand elle n'est pas sous forme électromagnétique, elle est sous forme cinétique des électrons qui se déplacent dans le plasma. En effet, leur énergie cinétique (volumique) est :

$$\boxed{u_c = \frac{1}{2}mnv^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(\omega t - kx)}$$

On a donc bien : $u_{em} + u_c = cte$