# Superposition de deux OPPH croisées

On s'intéresse à la superposition de deux ondes planes progressives monochromatiques de même amplitude $E_0$, de même pulsation $\omega$, de même polarisation $\overrightarrow{u_y}$ et se propageant dans le vide respectivement selon les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$, avec :

$$\overrightarrow{u_1} = \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_2} = -\sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_z}$$

1) Quelles sont les normes des deux vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_1}$ et $\overrightarrow{k_2}$ ?

**Correction**

On a affaire à deux OPPH dans le vide, donc $k_1 = k_2 = \dfrac{\omega}{c}$ d'après la relation de dispersion des ondes électromagnétiques dans le vide.

2) Sachant que les deux champs électriques sont en phase à tout instant dans le plan $x = 0$, donner leur expression sous forme complexe.

**Correction**

Les deux ondes sont polarisées selon $\overrightarrow{u_y}$. On rappelle que dans l'exponentielle, il faut mettre : $\omega t - \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

On en déduit :

$$\begin{cases} \underline{\overrightarrow{E_1}} = E_0\, e^{i\left[\omega t - kx\sin(\alpha) - kz\cos(\alpha)\right]}\,\overrightarrow{u_y} \\ \underline{\overrightarrow{E_2}} = E_0\, e^{i\left[\omega t + kx\sin(\alpha) - kz\cos(\alpha)\right]}\,\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

3) En déduire l'expression du champ électrique réel total. A-t-on affaire à une onde plane ? progressive ?

**Correction**

Le champ total est la somme des deux champs soit :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = E_0\left(e^{ikx\sin(\alpha)} + e^{-ikx\sin(\alpha)}\right) e^{i\left[\omega t - kz\cos(\alpha)\right]}\,\overrightarrow{u_y}$$

Ainsi :

$$\boxed{\underline{\overrightarrow{E}} = 2E_0\,\cos(kx\,\sin(\alpha))\, e^{i\left[\omega t - kz\cos(\alpha)\right]}\,\overrightarrow{u_y}}$$

Et le champ réel :

$$\overrightarrow{E} = 2E_0\,\cos(kx\,\sin(\alpha))\cos(\omega t - kz\,\cos(\alpha))\,\overrightarrow{u_y}$$

4) Déterminer le champ magnétique réel.

**Correction**

on utilise la relation de structure d'onde plane sur la somme des OPPH. Attention a ne pas appliquer la relation de structure d'OPPH sur l'onde totale directement, c'est faux car l'onde totale n'est pas une OPPH.

$$\underline{\overrightarrow{B}} = \frac{\overrightarrow{k_1} \wedge \underline{\overrightarrow{E_1}}}{\omega} + \frac{\overrightarrow{k_2} \wedge \underline{\overrightarrow{E_2}}}{\omega}$$

Après calcul, on trouve :

$$\overrightarrow{B} = \frac{2E_0}{c}\begin{pmatrix} -\cos(\alpha) \times \cos(kx\,\sin(\alpha)) \times \cos(\omega t - kz\,\cos(\alpha)) \\ 0 \\ \sin(\alpha) \times \sin(kx\,\sin(\alpha)) \times \sin(\omega t - kz\,\cos(\alpha)) \end{pmatrix}$$

5) Dans le cas particulier $\alpha = \pi/2$, expliciter le champ électrique et magnétique. Quelle est l'énergie transportée par l'onde ? Cette onde est dite stationnaire : pourquoi cette terminologie ?

**Correction**

Pour $\alpha = \pi/2$, on a :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = 2E_0\,\cos(kx)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B} = \frac{2E_0}{c}\,\sin(kx)\sin(\omega t)\,\overrightarrow{u_z}}$$

Le vecteur de Poynting vaut :

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{c}\,\sin(2kx)\sin(2\omega t)\,\overrightarrow{u_x}$$

Sa valeur moyenne est donc nulle. Il n'y a pas d'énergie transportée par l'onde, d'où la terminologie d'onde stationnaire, c'est à dire une onde dont l'énergie reste localisée au même endroit dans le temps.