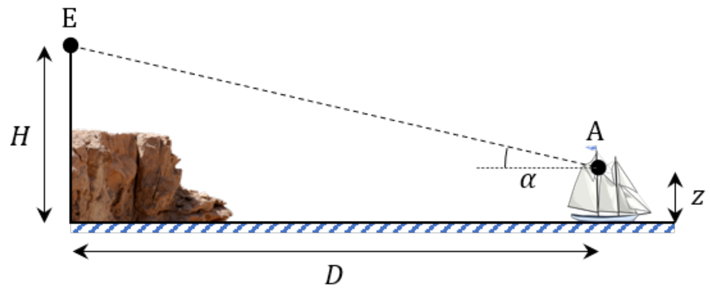
Réception d'un signal radio par un bateau

Un bateau navigue en mer à une distance $D = 10$ km de la côte. À bord du bateau, on souhaite capter une émission radio FM de fréquence $f_0 = 100$ MHz à l'aide d'une antenne réceptrice A placée sur le mat du bateau.

L'émetteur E est situé sur la côte, à une hauteur H au dessus du niveau de la mer. L'onde émise est assimilable au niveau du bateau à une onde plane dont la direction de propagation fait un angle α avec l'horizontale.



Par temps calme et mer plate, la surface de la mer se comporte comme un miroir parfaitement réfléchissant et la réflexion de l'onde introduit un déphasage de π. Le récepteur, placé à une altitude z au dessus du niveau de la mer, reçoit un rayon provenant directement de l'émetteur et un rayon réfléchi.

1) Déterminer l'expression de α.

Correction

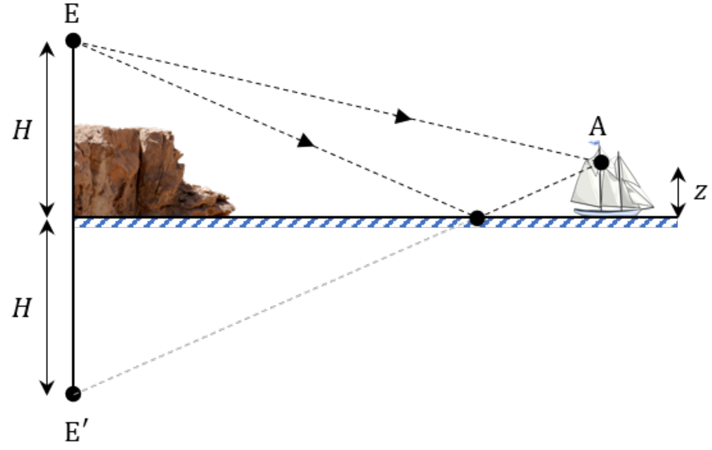
On remarque que $D \gg H$ et z. On peut donc travailler avec l'approximation ds petits angles : $\alpha \ll 1$ rad. On a :

$$\boxed{\tan(\alpha) \simeq \alpha = \frac{H - z}{D}}$$

2) Tracer le parcours du rayon réfléchi qui atteint A.

Correction

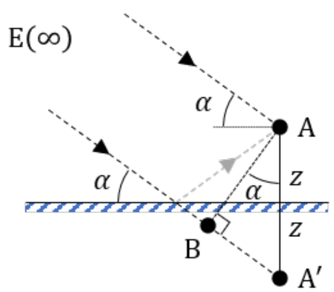
Il faut se servir de E$'$, image de E par rapport à la surface de l'eau, pour construire précisément de rayon qui subit une réflexion.



3) Calculer, en commettant le déphasage de π induit par la réflexion sur l'eau, la différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent en A en fonction de z et α, puis en fonction de z, H et D.

Correction

D est tellement grand que l'onde arrive plane. En terme de distance parcourue par l'onde, tout se passe comme si de rayon réfléchit continuait en ligne droite pour atteindre A$'$, image de A par rapport à la surface de l'eau.



On applique alors un théorème de Malus.

$$\delta = \text{BA}' \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) \simeq \alpha = \frac{\delta}{2z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = 2z\alpha = 2z\frac{H - z}{D}}$$

4) Quel est l'équivalent du déphasage de π en terme de différence de marche ?

Correction

Un déphasage de π correspond à une différence de marche de $\lambda/2$.

5) Déterminer l'intensité perçue pour une altitude z donnée. Que peut-on dire de sa valeur en $z = 0$?

Correction

Avec la formule de Fresnel :

$$\boxed{I(z) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left[2z\frac{H-z}{D} + \frac{\lambda}{2}\right]\right)\right)}$$

On a en particulier :

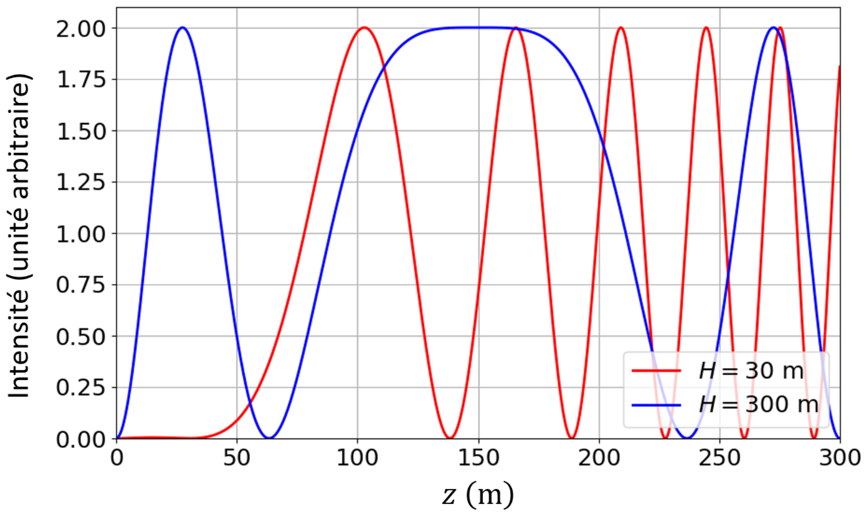
$$\boxed{I(z=0) = 0}$$

Les interférences sont destructives.

6) Montrer que le récepteur doit être placé suffisamment haut sur le mat pour que le signal émis soit correctement reçu. On pourra s'appuyer sur une application numérique effectuée pour $H = 30$ m et pour $H = 300$ m.

Correction

À titre indicatif, voici les graphes de $I(z)/2I_0$ pour $H = 30$ m et $H = 300$ m



On cherche donc à établir l'expression de z du premier maximum de l'intensité.

Les interférences constructives ont lieu pour :

$$2z\frac{H-z}{D} + \frac{\lambda}{2} = p\lambda \quad \text{avec :} \quad p \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad z^2 - Hz + \left(p - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{2} = 0$$

Les solutions sont :

$$z_{p,\pm} = \frac{1}{2}\left[H \pm \sqrt{H^2 - 2D\lambda\left(p - \frac{1}{2}\right)}\right] \quad \text{avec :} \quad \lambda = \frac{c}{f_0}$$

Après quelques essais à la calculatrice (sur la valeur de p et sur le signe $\pm$), on trouve (en cohérence avec le graphique) :

$$\begin{cases} \text{Pour } H = 30 \text{ m} \rightarrow \boxed{z_{0,+} = 103 \text{ m}} \\ \text{Pour } H = 300 \text{ m} \rightarrow \boxed{z_{2,-} = 27{,}5 \text{ m}} \end{cases}$$

Il est donc préférable que les antennes soient placées en hauteur !