Auto-décharge d'un condensateur

On rappelle qu'un plan infini en $z = 0$ crée un champ électrique uniformément chargé en surface créé un champ électrique :

$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

On considère un condensateur plan. Les deux armatures sont des disques de même axe, de rayon R (surface S) distants de e. On impose une différence de potentiel $V_1 - V_2$. Les armatures portent une charge respective $q_1 > 0$ et $q_2 = -q_1$.

1) On néglige les effets de bord. Préciser à quelle condition cette hypothèse sera valable.

Correction

Hypothèse valable si $e \ll R$.

2) Déterminer la capacité C du condensateur.

Correction

Plaçons l'armature 1 en $z = 0$ et l'armature 2 en $z = e$. Le champ électrique dans le condensateur vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \vec{u}_z$$

La différence de potentiel vaut :

$$V_1 - V_2 = \int_2^1 dV = \int_2^1 \overrightarrow{\text{grad}}(V) \cdot d\overrightarrow{\text{OM}} = \int_e^0 -\vec{E} \cdot dz \vec{u}_z = \frac{qe}{\varepsilon_0 S}$$

Or, par définition de la capacité :

$$\boxed{C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$$

En réalité, les armatures ne sont pas séparées par du vide, mais par un diélectrique qui est légèrement conducteur (conductivité γ), ce qui a comme conséquence de décharger très lentement le condensateur. On assimile la permittivité du diélectrique à celle du vide.

3) Par un bilan de charge entre t et $t + dt$ sur l'armature portant la charge $q_1(t)$, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $q_1(t)$. Faire apparaître une constante de temps τ.

Correction

Une densité volumique de courant $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ apparaît entre les armatures. Ce courant décharge l'armature portant $q_1(t)$.

On effectue un bilan de charge sur l'armature 1 entre t et $t + dt$.

$$q_1(t) = q_1(t + dt) + i \ dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{dq_1}{dt} = i = jS = \gamma ES = \frac{q_1 \gamma}{\varepsilon_0}$$

On en déduit :

$$\boxed{\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{\tau} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}}$$

4) La résoudre.

Correction

La solution est :

$$\boxed{q_1(t) = q_{10} \ e^{-t/\tau}}$$

5) Quelle est la résistance électrique R de la portion de diélectrique entre les deux armatures ? Comparer le produit RC à la constante de temps précédente et conclure.

Correction

On rappelle que :

$$R = \frac{e}{\gamma S}$$

On a donc :

$$\boxed{RC = \frac{e}{\gamma S} \times \frac{\varepsilon_0 S}{e} = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} = \tau}$$