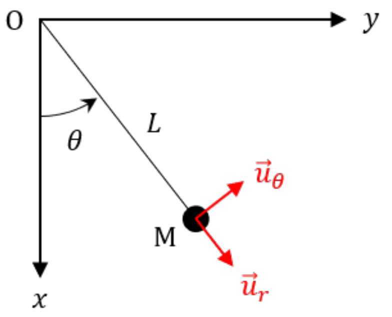
Pendule dans une voiture accélérée

On considère un pendule de masse m, de longueur L, pendu dans un véhicule uniformément accéléré, de vecteur accélération $\overrightarrow{a_0} = a_0\,\overrightarrow{u_y}$ (avec $a_0 > 0$). On se place dans le référentiel $\mathcal{R}$ lié à la voiture.



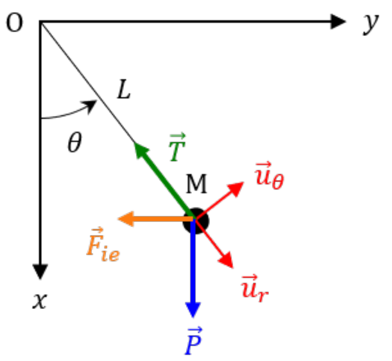
<u>Formulaire</u> :

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

1) Recopier le schéma et représenter les forces qui s'appliquent à la masse.

Correction

Schéma :



2) Établir l'équation du mouvement vérifiée par $\theta(t)$ dans $\mathcal{R}$.

Correction

On rappelle l'expression du vecteur accélération en polaire pour un mouvement circulaire.

$$\overrightarrow{\text{OM}} = L\,\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = L\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{a} = L\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - L\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}$$

Bilan des forces :

- Poids

$$\overrightarrow{P} = mg\,\overrightarrow{u_x} = mg\Big[\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}\Big]$$

- Tension du câble

$$\overrightarrow{T} = -T\,\overrightarrow{u_r}$$

- Force d'inertie d'entraînement

$$\overrightarrow{F_{ie}} = -m\,\overrightarrow{a_0} = ma_0\Big[-\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_r}\Big]$$

On applique le PFD à la masse m dans $\mathcal{R}$ non galiléen. On projette selon $\overrightarrow{u_\theta}$.

$$mL\ddot{\theta} = -mg\,\sin(\theta) - ma_0\,\cos(\theta)$$

Sous forme canonique :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\,\sin(\theta) + \frac{a_0}{L}\,\cos(\theta) = 0}$$

3) Déterminer la position d'équilibre θ_{eq} ainsi que la pulsation propre ω_0 des petites oscillations autour de la position d'équilibre. Comparer avec le cas où le véhicule est à l'arrêt.

Correction

À l'équilibre, le PFD donne :

$$\frac{g}{L}\,\sin(\theta_{eq}) + \frac{a_0}{L}\,\cos(\theta_{eq}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tan(\theta_{eq}) = -\frac{a_0}{g}}$$

On pose : $\theta(t) = \theta_{eq} + \varepsilon(t)$ avec ε un infiniment petit d'ordre 1. On rappelle la formule de Taylor à l'ordre 1 pour sin et cos :

$$\sin(\theta) \simeq \sin(\theta_{eq}) + \varepsilon\,\cos(\theta_{eq}) \quad \text{et} \quad \cos(\theta) \simeq \cos(\theta_{eq}) - \varepsilon\,\sin(\theta_{eq})$$

On injecte dans le PFD :

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{L}\Big[\sin(\theta_{eq}) + \varepsilon\,\cos(\theta_{eq})\Big] + \frac{a_0}{L}\Big[\cos(\theta_{eq}) - \varepsilon\,\sin(\theta_{eq})\Big] \\ &= \ddot{\varepsilon} + \underbrace{\left[\frac{g}{L}\,\cos(\theta_{eq}) - \frac{a_0}{L}\,\sin(\theta_{eq})\right]}_{=\,\omega_0^2}\varepsilon \end{aligned}$$

On a donc (avec ce qui précède et le formulaire) :

$$\boxed{\omega_0^2 = \left[\frac{g}{L} - \frac{a_0}{L}\,\tan(\theta_{eq})\right]\cos(\theta_{eq}) = \frac{g}{L}\left[1 + \left(\frac{a_0}{g}\right)^2\right]\cos(\theta_{eq}) = \frac{g}{L}\sqrt{1 + \left(\frac{a_0}{g}\right)^2}}$$