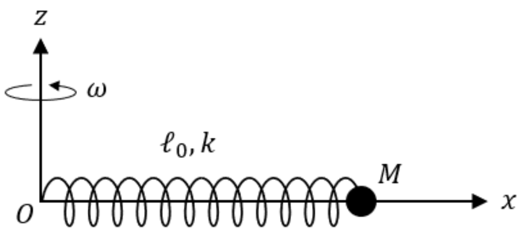
Perle sur une tige en rotation

Une petite perle, assimilée à un point matériel M glisse sans frottement sur une tige horizontale d'axe (Ox), tournant à la vitesse constante ω autour de l'axe vertical (Oz). La perle est liée au point O par un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. À l'instant initial, le ressort n'est ni comprimé, ni tendu et la perle a une vitesse nulle par rapport à la tige.



Notation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad a = \frac{\omega_0}{\omega}$$

1) Établir l'équation différentielle du mouvement et la mettre sous forme canonique, en fonction de ℓ_0, a et ω.

Correction

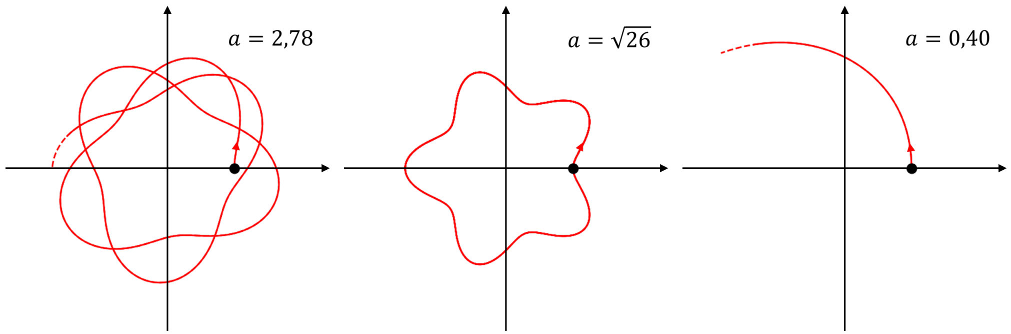
On se place dans le référentiel tournant à la vitesse ω par rapport à un référentiel galiléen. Bilan des forces :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{R} = R_y\overrightarrow{u_y} + R_z\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{F}_{el} = -k\,(x-\ell_0)\,\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{f}_{ie} = m\omega^2 x\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{f}_{ic} = -2m\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{v} = -2m\omega\overrightarrow{u_z}\wedge\dot{x}\overrightarrow{u_x} = -2m\omega\dot{x}\overrightarrow{u_y} \end{cases}$$

On applique le PFD que l'on projette sur (Ox).

$$m\ddot{x} = -k\,(x-\ell_0) + m\omega^2 x \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \left(a^2-1\right)\omega^2\,x = a^2\omega^2\ell_0}$$

On donne ci-dessous l'allure de la trajectoire de M pour différentes valeurs de a, dans le référentiel terrestre galiléen. Le point noir représente le point de départ.



2) Montrer qu'il existe une valeur particulière de a, notée a_c, qui séparent les solutions en deux catégories : les solutions bornées et les solutions non bornées.

Correction

La nature des solutions change selon le signe de a^2-1. On pose donc : $\boxed{a_c = 1}$. Si $a > a_c$, alors les solutions sont bornées (oscillateur harmonique). Si $a \leq a_c$, alors les solutions ne sont pas bornées.

Dans la suite, on se place dans le cas où $a > a_c$.

3) Introduire la pulsation propre ω_1. Résoudre complètement l'équation différentielle et montrer que le ressort possède une longueur toujours supérieure à sa longueur à vide.

Correction

On pose $\boxed{\omega_1 = \omega\,\sqrt{a^2-1}}$. Solution :

$$x(t) = \frac{a^2}{a^2-1}\,\ell_0 + A\,\cos(\omega_1 t) + B\,\sin(\omega_1 t)$$

Avec les conditions initiales :

$$x(0) = \frac{a^2}{a^2-1}\,\ell_0 + A = \ell_0 \quad \Rightarrow \quad A = \left(1 - \frac{a^2}{a^2-1}\right)\ell_0 = -\frac{\ell_0}{a^2-1}$$

et,

$$v(0) = B\omega_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{x(t) = \frac{a^2 - \cos(\omega_1 t)}{a^2-1}\,\ell_0}$$

On a de plus :

$$-\cos(\omega_1 t) \geq -1 \quad \Rightarrow \quad a^2 - \cos(\omega_1 t) \geq a^2 - 1 > 0$$

Ainsi,

$$\frac{a^2 - \cos(\omega_1 t)}{a^2 - 1} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) \geq \ell_0}$$

4) Déterminer la force que la tige exerce sur la perle.

Correction

Il s'agit de la réaction normale du support. En appliquant le PFD sur (Oy) et (Oz), il vient immédiatement :

$$\boxed{\overrightarrow{R} = 2m\omega\dot{x}\overrightarrow{u_y} + mg\overrightarrow{u_z}}$$

5) Montrer que le mouvement est conservatif.

Correction

Les forces $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{R}$ et $\overrightarrow{f}_{ic}$ sont orthogonales au mouvement et donc ne travaille pas. Les forces $\overrightarrow{F}_{el}$ et $\overrightarrow{f}_{ie}$ sont conservatives car elles dérivent d'une énergie potentielle (cf. ci-dessous). Le mouvement est donc conservatif.

6) Déterminer l'énergie potentielle du système. En déduire la/les positions d'équilibre ainsi que leur stabilité.

Correction

L'énergie potentielle vaut :

$$\boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k\left(x - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2}$$

On cherche les zéros de sa dérivée première pour trouver les positions d'équilibres.

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = k\left(x_{eq} - \ell_0\right) - m\omega^2 x_{eq} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{eq} = \frac{a^2}{a^2 - 1}\,\ell_0}$$

On trouve (évidemment) le même résultat qu'avec l'équation différentielle.

Déterminons le signe de la dérivée seconde pour connaître sa stabilité.

$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} = k - m\omega^2 = m\omega^2\left(a^2 - 1\right) > 0$$

Cette position est toujours stable dans le cas où $a > a_c$.

7) Déterminer la relation que doit vérifier a pour que la trajectoire se ferme au bout d'un tour, comme indiquée sur l'image centrale. En déduire la relation que doit vérifier a pour que la trajectoire se ferme au bout d'un ou plusieurs tours.

Correction

Notons T_1 la période des oscillations et T la période de révolution autour de l'axe (Oz). Pour que la trajectoire se ferme au bout d'un tour, il faut que le système est fait un nombre entier d'oscillations en une période de révolution. Ainsi :

$$T = n \times T_1 \quad \text{avec :} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi,

$$n = \frac{T}{T_1} = \sqrt{a^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \sqrt{n^2 + 1} \quad \text{avec :} \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

C'est le cas de la figure où $n = 5$ oscillations en un tour.

Dans le cas où la trajectoire se ferme au bout de p tours et n oscillations, on a la relation :

$$p \times T = n \times T_1 \quad \text{avec :} \quad p, n \in \mathbb{N}^*$$

Ainsi,

$$q = \frac{n}{p} = \frac{T}{T_1} = \sqrt{a^2 - 1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \sqrt{q^2 + 1} \quad \text{avec :} \quad q \in \mathbb{Q}^*}$$