Vitesse angulaire d'une planète

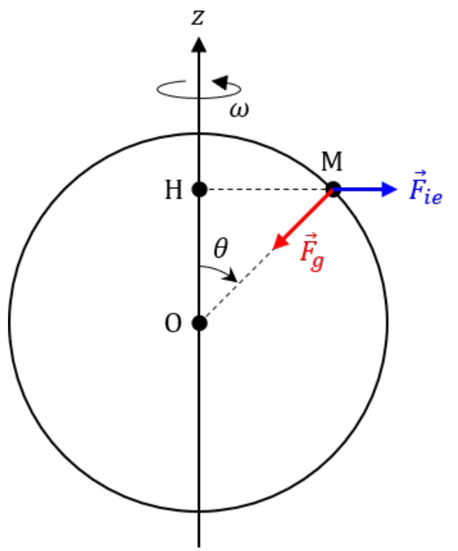
Une planète sphérique de densité ρ uniforme a son un champ de pesanteur à l'équateur égal à la moitié de celui aux pôles.
Données :

- Constante universelle de gravitation $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}
- Rayon de la Terre $\hbar = 6378$ km
- Masse de la Terre $M = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg

Déterminer sa vitesse angulaire de rotation propre, en fonction de ρ et G. Faire l'application numérique pour la Terre. Commenter.

Correction

On place un repère sphérique dont l'origine est au centre de la planète et l'axe z coïncide avec l'axe des pôles. On note R le rayon de la planète, M sa masse et ω sa vitesse angulaire.



Soit un objet de masse m dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$. Le poids le l'objet comprend la force gravitationnelle et la force d'inertie d'entraînement. La somme de ces deux forces vaut :

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -G\frac{mM}{R^2}\overrightarrow{u}_r + mR\omega^2\overrightarrow{u}_{HM}$$

On en déduit le champ de pesanteur aux pôle et à l'équateur :

$$g_{pôle} = G\frac{M}{R^2} \quad \text{et} \quad g_{équ.} = G\frac{M}{R^2} - R\omega^2$$

On souhaite que $g_{pôle} = 2g_{équ.}$. On en déduit :

$$G\frac{M}{R^2} = 2G\frac{M}{R^2} - 2R\omega^2 \quad \Rightarrow \quad G\frac{M}{R^2} = 2R\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{2R^3}}$$

Avec la masse volumique $M = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho$ de la planète :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2\pi}{3}\rho G}}$$

Pour la Terre :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{2R^3}} = 8{,}76 \times 10^{-4}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 7{,}17 \times 10^3\ \text{s} = 2\ \text{heures}}$$

Il faudrait que la Terre fasse un tour sur elle-même en 2 heures au lieu de 24 (12 fois plus rapide).