Onde électromagnétique confinée

On rappelle que les champs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont nuls dans un conducteur parfait. On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux 1 et 2 :

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\overrightarrow{n}_{1\to 2} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1}\right) \wedge \overrightarrow{n}_{1\to 2} = -\mu_0\,\overrightarrow{j}_s$$

où σ et $\overrightarrow{j}_s$ sont respectivement les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface, et $\overrightarrow{n}_{1\to 2}$ le vecteur unitaire normal dirigé de 1 vers 2.

On considère un champ électrique dans le vide de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0\ e^{i(\omega t - kz)}\overrightarrow{u}_x$$

1) Montrer que $\omega = kc$.

Correction

D'après l'équation de d'Alembert,

$$\Delta\underline{\overrightarrow{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad -k^2\underline{\overrightarrow{E}} - \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\overrightarrow{E}} = \overrightarrow{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = kc}$$

2) On place un conducteur parfait semi-infini en $z > 0$. Montrer que les relations de passage pour $\overrightarrow{E}$ impliquent l'existence d'une onde réfléchie et donner son expression. Donner la nature de l'onde dans le demi-espace $z < 0$.

Correction

Appelons 1 le vide ($z < 0$) et 2 le conducteur ($z > 0$), donc : $\overrightarrow{n}_{1\to 2} = \overrightarrow{u}_z$. En ne tenant compte que de l'onde incidente, d'après la relation de passage en $z = 0$,

$$-E_0\ e^{i\omega t}\overrightarrow{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ \overrightarrow{u}_z$$

Comme $E_0 \neq 0$, cette relation ne peut pas être satisfaite. Il y a donc contradiction ! Il existe une onde réfléchie de la forme :

$$\underline{\overrightarrow{E_r}} = rE_0\ e^{i(\omega t + kz)}\overrightarrow{u}_x$$

Comme l'onde totale est $\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E_i}} + \underline{\overrightarrow{E_r}}$, la relation de passage donne cette fois :

$$-E_0\,(1 + r)\,e^{i\omega t}\overrightarrow{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ \overrightarrow{u}_z \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} r = -1 \\ \sigma = 0 \end{cases}}$$

L'onde totale s'écrit donc :

$$\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{\overrightarrow{E_i}} + \underline{\overrightarrow{E_r}} = E_0\left(e^{-ikz} + e^{ikz}\right)e^{i\omega t}\overrightarrow{u}_x = -2iE_0\ \sin(kz)\,e^{i\omega t}\overrightarrow{u}_x$$

En repassant en réel :

$$\boxed{\overrightarrow{E} = \mathcal{R}e\left(\underline{\overrightarrow{E_{tot}}}\right) = 2E_0\ \sin(kz)\sin(\omega t)\ \overrightarrow{u}_x}$$

Il s'agit d'une onde stationnaire : les variables de temps et d'espace sont découplées.

3) En déduire le champ magnétique à partir d'une équation de Maxwell.

Correction

D'après l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{E}\right) = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial z}\overrightarrow{u}_y = -\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}$$

Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \frac{2kE_0}{\omega}\ \cos(kz)\cos(\omega t)\ \overrightarrow{u}_y}$$

4) Qu'impliquent les relations de passage pour $\overrightarrow{B}$? Interpréter.

Correction

D'après la relation de passage sur le champ magnétique appliquée en $z = 0$,

$$-\overrightarrow{B} \wedge \overrightarrow{u}_z = -\mu_0\ \overrightarrow{j}_s \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\ \cos(\omega t)\ \overrightarrow{u}_x}$$

Il existe un courant surfacique à la surface du conducteur parfait.

Interprétons qualitativement cette expression. Le champ électrique incident met en mouvement les électrons en surface du conducteur, d'où la direction $\overrightarrow{u}_x$ du courant de surface. En retour, ce courant de surface créé également un champ électrique : le champ réfléchi. Ce champ existe non seulement dans le vide, mais aussi dans le conducteur, à ceci près qu'il se déplace selon $+\overrightarrow{u}_z$. Comme il est de même amplitude mais en opposition de phase avec le champ incident, cela permet d'interpréter la nullité du champ total dans le conducteur.

On ajoute un deuxième conducteur parfait en $z = -L$.

5) Déterminer, sans refaire les calculs précédents, les ondes pouvant exister entre les deux conducteurs et leurs caractéristiques. On introduira un entier n.

Correction

Comme précédemment, la relation de passage en $z = -L$ impose que le champ total $\overrightarrow{E}$ soit nul en $z = -L$ à tout instant, d'où on déduit

$$\sin(kL) = 0 \quad \Rightarrow \quad kL = n\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n\pi}{L}$$

Ces ondes sont les modes propres de la cavité formée des deux conducteurs. La relation précédente peut s'écrire en termes de longueurs d'onde ou de fréquence,

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \quad \text{et} \quad f = \frac{kc}{2\pi} = \frac{nc}{2L} \quad \text{avec :} \quad n \in \mathbb{N}^*}$$

6) Quelle est la puissance moyenne traversant une surface $z = cte$?

Correction

La puissance surfacique est reliée au vecteur de Poynting, qu'il faut calculer à partir des champs réels,

$$\overrightarrow{\Pi} = \frac{\overrightarrow{E} \wedge \overrightarrow{B}}{\mu_0} = \frac{2E_0}{c} \cos(kz)\sin(kz)\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\overrightarrow{u}_z$$

Après simplification :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = \frac{8E_0}{c} \sin(2kz)\sin(2\omega t)\,\overrightarrow{u}_z \quad \Rightarrow \quad \left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \overrightarrow{0}}$$

En moyenne, l'énergie ne se propage pas dans la cavité, ce qui est cohérent avec le fait que les ondes y soient stationnaires.