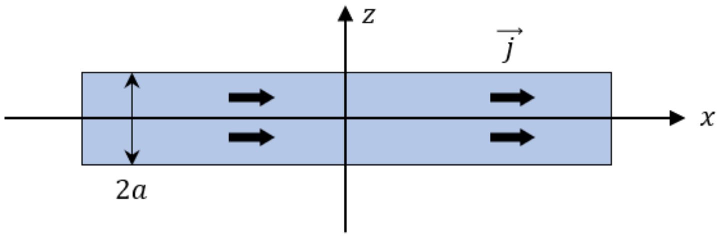
Champ magnétique créé par une nappe de courant

On considère une distribution volumique de courant délimitée par les deux plans d'équation $z = a$ et $z = -a$. On suppose qu'entre ces plans la densité volumique de courant est uniforme : $\overrightarrow{j} = j\overrightarrow{u_x}$ avec $j > 0$.



1) Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(\mathrm{M})$ créé en tout point M de l'espace.

Correction

La distribution de courant est invariante par translation selon $(\mathrm{O}x)$ et $(\mathrm{O}y)$. Donc $\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{B}(z)$.

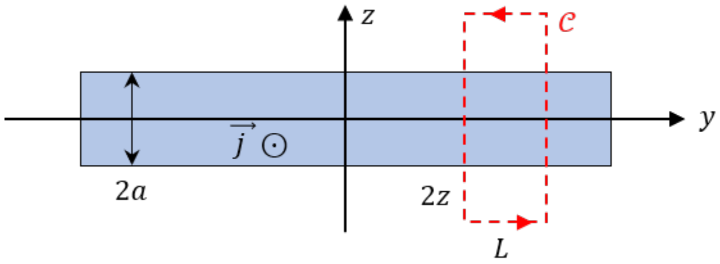
Le plan $(\mathrm{M}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Donc $\overrightarrow{B}$ est orthogonal à ce plan. Donc :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\mathrm{M}) = B(z)\,\overrightarrow{u_y}}$$

Enfin, le plan $(\mathrm{O}xy)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Il s'agit donc d'un plan de d'anti-symétrie du champ magnétique. On en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(-z) = -\overrightarrow{B}(z)}$$

On applique le théorème de théorème d'Ampère sur un rectangle de longueur $2z$ et de largeur L, dans un plan parallèle à $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ et centré par rapport à la distribution de courant.



$$\oint \overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \mu_0 I_{int}$$

Sur les côtés dirigés selon $\overrightarrow{u_z}$, on a : $\overrightarrow{B} \cdot \overrightarrow{d\ell} = 0$. Sur les côtés dirigés selon $\overrightarrow{u_y}$, l'intégrale porte sur la variable y, le champ $\overrightarrow{B}(z)$ est constant et peut sortir de l'intégrale. Enfin, le produit scalaire sur le segment du dessus et du dessous sont égaux :

$$\overrightarrow{B}(z) \cdot d\ell\,(-\overrightarrow{u_y}) = -\overrightarrow{B}(-z) \cdot d\ell\,(-\overrightarrow{u_y}) = \overrightarrow{B}(-z) \cdot d\ell\,\overrightarrow{u_y}$$

Il faut donc seulement calculer la circulation sur le côté du haut du rectangle (et prendre son double). Ainsi :

$$2B(z>0) \times L = \mu_0 I_{int} \quad \text{avec :} \quad I_{int} = \begin{cases} -2zLj & \text{si : } z \leq a \\ -2aLj & \text{si : } z \geq a \end{cases}$$

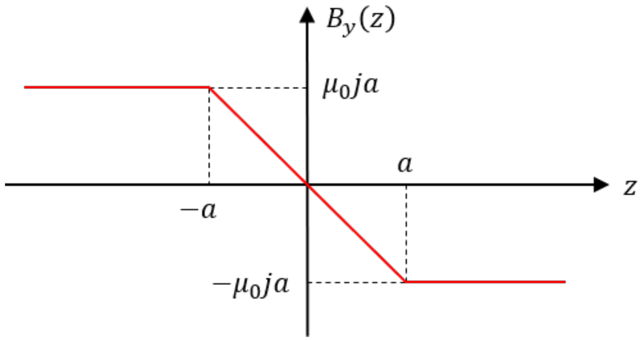
On en déduit :

$$\boxed{B(z>0) = \begin{cases} -\mu_0 zj & \text{si : } z \leq a \\ -\mu_0 aj & \text{si : } z \geq a \end{cases} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B}(-z) = -\overrightarrow{B}(z)}$$

2) Tracer le graphe représentant $B_y(z)$. Commenter le comportement de $\overrightarrow{B}$ en $z = \pm a/2$ où la densité de courant est discontinue.

Correction

Graphe :



Le champ est continu même pour une distribution volumique discontinue.

Considérons maintenant que la couche est d'épaisseur très fine : $a \to 0$. On cherche à la décrire par une distribution surfacique de courant j_s uniforme à partir des résultats précédentes.

3) Exprimer la densité surfacique de courant j_s en fonction de j et a. Que devient le champ magnétique dans chaque demi-espace ?

Correction

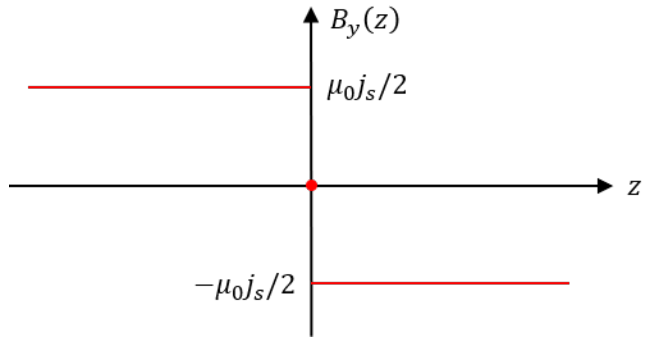
Soit une surface d'épaisseur $2a$ et de largeur L de la distribution de courant. L'intensité traversant cette surface vaut :

$$I = j \times 2aL = j_s \times L \quad \Rightarrow \quad \boxed{j_s = 2aj}$$

Le champ magnétique devient constant dans chaque demi espace :

$$\boxed{B(z) = \begin{cases} 0 & \text{si : } z = 0 \\ \dfrac{-\mu_0 j_s}{2} & \text{si : } z > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B}(-z) = -\overrightarrow{B}(z)}$$

Graphe :



4) Commenter le comportement de $\overrightarrow{B}$ au passage du plan. Généraliser ce résultat à l'aide de cet exemple : en déduire une relation de passage du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ au passage d'une distribution surfacique de courant j_s.

Correction

Le champ magnétique est discontinu au passage d'une distribution surfacique de courant. On constante que l'on a :

$$B(0^+) - B(0^-) = -\mu_0 j_s$$

On généralise ce résultat : au passage de l'interface, on a la relation de passage :

$$\boxed{\overrightarrow{B}_2 - \overrightarrow{B}_1 = \mu_0 \overrightarrow{j_s} \wedge \overrightarrow{u}_{1\to 2}}$$