Cavité dans une sphère chargée

On considère une sphère uniformément chargée de rayon R de centre O, de charge Q. Cette sphère présente une cavité vide sphérique en O′ en son intérieur.

1) Déterminer le champ électrique en tout point à l'intérieur de la sphère chargée, si celle si ne présentait pas de cavité.

Correction

On se place en coordonnées sphériques $(\mathrm{O}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Soit un point $\mathrm{M} = (r, \theta, \varphi)$ quelconque de l'espace.

La distribution de charge est invariante par rotation selon les angles θ et φ. Donc le champ électrique l'est également.

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \vec{E}(r)$$

Le plans $(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(\mathrm{M}, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charge (en réalité, tous les plans qui contiennent la droite (OM) sont des plans de symétrie). Donc $\vec{E}(\mathrm{M})$ appartient à l'intersection de ces plans.

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = E(r)\,\vec{u}_r$$

On prend comme surface de Gauss une sphère de centre O de rayon r. Ainsi, $\vec{dS} = dS\,\vec{u}_r$.

Le théorème de Gauss assure que :

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q_{int}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$$

On se place dans le cas où $r \leq R$.

$$Q_{int}(r \leq R) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

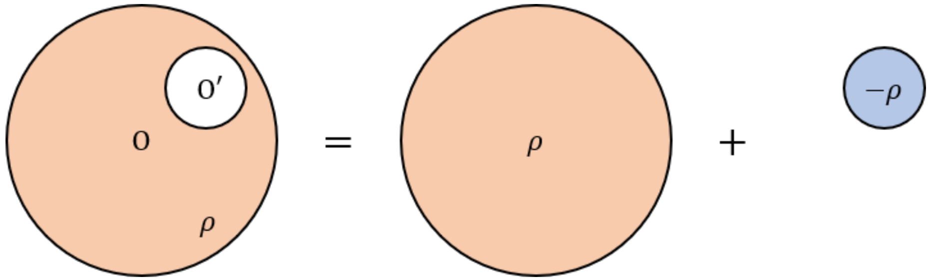
Conclusion :

$$\boxed{\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\vec{u}_r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

2) À l'aide du principe de superposition, déterminer le champ électrique en tout point à l'intérieur de la cavité.

Correction

On interprète la cavité vide comme une cavité de densité de charge $-\rho$, superposée à celle de la boule de charge $+\rho$.



Ainsi le champ dans la cavité est donné par :

$$\boxed{\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{\mathrm{O'M}} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\,\overrightarrow{\mathrm{OO'}}}$$

Le champ est donc uniforme dans toute la cavité.

Dans 20000 lieux sous les mers, Jules Verne décrit un lac de surface parfaitement horizontale dans une cavité souterraine.

3) En déduire le champ gravitationnel à l'intérieur d'une cavité creusée à l'intérieur de la terre. Que pensez-vous du récit de Jules Verne ?

Correction

Par analogie entre la gravitation et l'électrostatique, on en déduit :

$$\vec{g}(\mathrm{M}) = -\frac{4\pi G \rho}{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OO'}}$$

Le champ gravitationnel étant uniforme, le lac est effectivement parfaitement plan.