Variations de température du sol

L'objet de cet exercice est d'étudier l'amortissement dans le sol des variations quotidiennes et annuelles de température, en vue de l'enfouissement d'une canalisation d'une installation géothermique.

On se place en repère cartésien où l'axe (Oz) est vertical vers le bas. La surface du sol, supposée plane et d'extension infinie, coïncide avec le plan (Oxy). La température au niveau de cette surface, notée $T(z=0,t)$, varie sinusoïdalement en fonction du temps t avec la pulsation ω autour d'une moyenne T_0 :

$$T(0,t) = T_0 + T_1\,\cos(\omega t)$$

où T_1 est une constante.

Soit un point M dans le sol repéré par sa profondeur $z \geq 0$. On cherche à déterminer le champ de température $T(z,t)$.

On travaille avec l'écart de température par rapport à T_0 en posant $\theta(z,t) = T(z,t) - T_0$. Tout autre phénomène que la conduction thermique est négligé. On donne, dans le cadre de notre modèle, l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad \text{avec :} \quad D = \frac{\lambda}{\rho c}$$

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur en régime sinusoïdal permanent. À cet effet, on introduit la variable complexe $\underline{\theta}(z,t) = f(z)\ e^{i\omega t}$.

1) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(z)$.

Correction

L'équation de diffusion en complexe donne :

$$i\omega f(z)\ e^{i\omega t} = D\ f''(z)\ e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad f''(z) - \frac{i\omega}{D} f(z) = 0$$

2) Exprimer la solution générale de cette équation, en introduisant un paramètre δ homogène à une longueur, et en faisant intervenir deux constantes d'intégration notées A et B.Par un argument physique à préciser, montrer que l'une de ces constantes est nulle.

Correction

On cherche des solutions de la forme : $f(z) = e^{rz}$. Le polynôme caractéristique de cette équation est :

$$r^2 - \frac{i\omega}{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2D}} = \pm\frac{1+i}{\delta} \quad \text{avec :} \quad \delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$$

On fait apparaître une longueur caractéristique δ de diffusion. Les solution sont donc de la forme :

$$f(z) = A\ \exp\left(\frac{1+i}{\delta}\ z\right) + B\ \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}\ z\right)$$

Or, $f(\infty)$ ne peut pas diverger, donc $A = 0$. On en déduit :

$$\boxed{f(z) = B\ \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}\ z\right)}$$

3) Déterminer alors entièrement $\theta(z,t)$. En déduire $T(z,t)$ en fonction de T_0, δ, T_1 et ω. Interpréter physiquement l'expression obtenue.

Correction

On a donc :

$$\underline{\theta}(z,t) = B\ \exp\left(-\frac{1+i}{\delta}\ z\right)\ e^{i\omega t} = B\ e^{-z/\delta}\ e^{i(\omega t - z/\delta)}$$

Avec la condition initiale :

$$\underline{\theta}(0,t) = T_1\ e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\theta}(z,t) = T_1\ e^{-z/\delta}\ e^{i(\omega t - z/\delta)}}$$

On en déduit :

$$\underline{T}(z,t) = T_0 + T_1\ e^{-z/\delta}\ e^{i(\omega t - z/\delta)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(z,t) = T_0 + T_1\ e^{-z/\delta}\ \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)}$$

La température est une onde qui se propage selon les z croissants et dont l'amplitude est atténuée sur une distance caractéristique δ.

4) Exprimer la profondeur L_{10} pour laquelle l'amplitude des variations de température dans le sol est atténuée d'un facteur 10 par rapport à celle de la surface du sol.

Correction

On cherche L_{10} définie par :

$$\frac{1}{10} = e^{-L_{10}/\delta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_{10} = \delta\ \ln(10)}$$

5) On donne pour un sol humide $D = 0{,}25 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Calculer numériquement L_{10} dans le cas de la variation quotidienne de température, puis dans celui de la variation annuelle de température. À quelle profondeur préconiseriez-vous d'enfouir la canalisation de l'installation géothermique ?

Correction

On a :

$$\omega_{\text{jour}} = \frac{2\pi}{1\ \text{jour}} = 7{,}3 \times 10^{-5}\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega_{\text{année}} = \frac{2\pi}{1\ \text{an}} = 2{,}0 \times 10^{-7}\ \mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

On en déduit :

$$\boxed{L_{10,\text{jour}} = 20\ \text{cm} \quad \text{et} \quad L_{10,\text{année}} = 3{,}7\ \text{m}}$$

On peut enfouir la canalisation à 1 m environ pour ne pas être sensible aux variations quotidiennes.

6) Calculer littéralement puis numériquement le décalage temporel Δt entre $T(L_{10}, t)$ et $T(0, t)$ dans les deux cas de la question précédente.

Correction

On cherche le décalage temporelle qui induit le même déphasage que la profondeur L_{10}, c'est-à-dire :

$$\omega \Delta t - \frac{L_{10}}{\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{L_{10}}{\delta \omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \Delta t_{\text{jour}} = 8\ \text{h}\ 50\ \text{min} \\ \Delta t_{\text{année}} = 47\ \text{jours} \end{cases}}$$

7) Le modèle développé vous paraît-il pertinent ? Quels phénomènes non pris en compte dans le modèle peuvent intervenir ?

Correction

Le modèle est pertinent car il donne des ordres de grandeur. On peut affiner le modèle : paramètres ρ, c, λ non constants ou variation de température non sinusoïdale.