Transmission à l'interface vide-plasma

Un plasma occupe le demi-espace $z > 0$ (le demi espace $z < 0$ est vide). Une onde plane progressive monochromatique, polarisée rectilignement, arrive en incidence normale sur ce plasma :

$$\underline{\vec{E}_i} = E_0\, e^{i(\omega t - k_0 z)}\vec{u}_x \quad \text{avec :} \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

On rappelle que dans le plasma, la relation de dispersion est :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

On appelle $\underline{r}$ et $\underline{t}$ les coefficients de réflexion et de transmission, en amplitude pour le champ électrique.

1) Écrire la forme des champs électriques et magnétiques incidents, réfléchis et transmis.

Correction

Relation de structure de l'OPPH dans le vide :

$$\boxed{\underline{\vec{E}_i} = E_0\, e^{i(\omega t - k_0 z)}\vec{u}_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\vec{B}_i} = \frac{\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_i}}{c} = \frac{E_0}{c}\, e^{i(\omega t - k_0 z)}\vec{u}_y}$$

Onde réfléchie :

$$\boxed{\underline{\vec{E}_r} = \underline{r}E_0\, e^{i(\omega t + k_0 z)}\vec{u}_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\vec{B}_r} = \frac{-\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_r}}{c} = -\frac{\underline{r}E_0}{c}\, e^{i(\omega t + k_0 z)}\vec{u}_y}$$

Onde transmise, on utilise la même relation de structure (valable pour les pseudo OPPH) :

$$\boxed{\underline{\vec{E}_t} = \underline{t}E_0\, e^{i(\omega t - \underline{k} z)}\vec{u}_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{\vec{B}_t} = \frac{\underline{k}\,\vec{u}_z \wedge \underline{\vec{E}_t}}{\omega} = \frac{\underline{t}\,\underline{k}E_0}{\omega}\, e^{i(\omega t - \underline{k} z)}\vec{u}_y}$$

2) En utilisant la continuité des champs électrique et magnétique en $z = 0$, calculer $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de $\underline{n} = \underline{k}/k_0$.

Correction

Continuité du champ électrique en $z = 0$:

$$\underline{\vec{E}_i} + \underline{\vec{E}_r} = \underline{\vec{E}_t} \quad \Rightarrow \quad 1 + \underline{r} = \underline{t}$$

Continuité du champ magnétique en $z = 0$:

$$\underline{\vec{B}_i} + \underline{\vec{B}_r} = \underline{\vec{B}_t} \quad \Rightarrow \quad k_0\,(1 - \underline{r}) = \underline{k}\underline{t} \quad \Rightarrow \quad 1 - \underline{r} = \underline{n}\,\underline{t}$$

On en déduit :

$$\boxed{\underline{r} = \frac{1 - \underline{n}}{1 + \underline{n}} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2}{1 + \underline{n}}}$$

3) En déduire les coefficients de réflexion R et transmission T en énergie. On les exprimera en fonction de $\underline{r}$, $\underline{t}$ et $\underline{n}$.

Correction

Calculons les vecteurs de Poynting moyens.

$$\left\langle \vec{\Pi}_i \right\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\,\mathcal{R}e\left(\underline{\vec{E}_i} \wedge \underline{\vec{B}_i}^*\right) = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{u}_z$$

De même :

$$\left\langle \vec{\Pi}_r \right\rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\,|\underline{r}|^2\,\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \left\langle \vec{\Pi}_t \right\rangle = -\frac{E_0^2}{2\mu_0 \omega}\,\mathcal{R}e(\underline{k})\,|\underline{t}|^2\,\vec{u}_z$$

On en déduit :

$$\boxed{R = \frac{\left\|\left\langle \vec{\Pi}_r \right\rangle\right\|}{\left\|\left\langle \vec{\Pi}_i \right\rangle\right\|} = |\underline{r}|^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{\left\|\left\langle \vec{\Pi}_t \right\rangle\right\|}{\left\|\left\langle \vec{\Pi}_i \right\rangle\right\|} = \mathcal{R}e(\underline{n}) \times |\underline{t}|^2}$$

4) Calculer explicitement R et T dans le cas où $\omega < \omega_p$. Que conclure ?

Correction

Si $\omega < \omega_p$:

$$\underline{k}^2 \in \mathbb{R}^- \quad \Rightarrow \quad \underline{k} \in i\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \underline{n} \in i\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |\underline{r}| = 1 \\ \mathcal{R}e(\underline{n}) = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\boxed{R = 1 \quad \text{et} \quad T = 0}$$

L'onde est intégralement réfléchie, sans perte d'énergie.

5) Dans le cas où $\omega > \omega_p$, calculer R et T en fonction de n, dont on donnera aussi l'expression. Commenter le cas où $\omega_p = 0$.

Correction

Si $\omega > \omega_p$:

$$\underline{k} = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{n} = n = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} \in \mathbb{R}^+}$$

On en déduit :

$$\boxed{R = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{4n}{(1+n)^2}}$$

Dans le cas où $\omega_p = 0$, c'est-à-dire du vide, on trouve :

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = 0 \quad \text{et} \quad T = 1}$$

Il est normal qu'à une interface vide/vide, l'onde soit intégralement transmise.

6) Quelle relation existe-t-il entre R et T ? Quelle est son interprétation physique ?

Correction

On a :

$$R + T = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 + \frac{4n}{(1+n)^2} = 1$$

Cela traduit la conservation de l'énergie : l'onde est transmise et/ou réfléchie, elle n'est pas absorbée par le plasma.