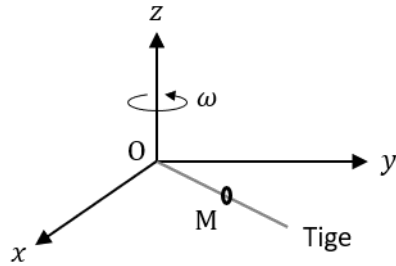


# ANNEAU SUR UNE TIGE EN ROTATION

Un anneau M assimilable à un point matériel de masse  $m$  coulisse sans frottement sur une tige horizontale mobile autour d'un axe vertical et animée d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  autour de cet axe. À  $t = 0$ , la tige est confondue avec l'axe  $(Ox)$ , et l'anneau est en  $x = a$ , immobile par rapport à la tige.

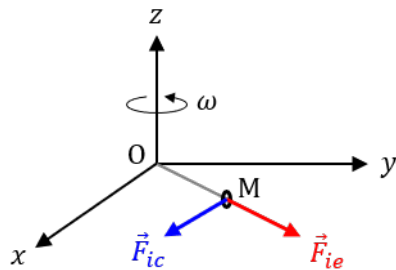


On se place dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de la tige.

- 1) Reproduire le schéma et représenter graphiquement la direction de la force d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

**Correction**

Schéma :



- 2) Donner l'expression de ces deux forces.

**Correction**

Force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{OM} = m\omega^2 r \vec{u}_r$$

Force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v} = -2m\omega\dot{r} \vec{u}_\theta$$

- 3) Étudier le mouvement dans  $\mathcal{R}'$ .

**Correction**

En plus des deux forces précédentes, la tige est soumise à son poids et à une réaction normale du support. Le support étant à une dimension (selon  $\vec{u}_r$ ), la réaction du support est selon 2 dimensions *a priori*.

$$\vec{P} = -mg\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{N} = N_\theta \vec{u}_\theta + N_z \vec{u}_z$$

On applique le PFD à l'anneau de masse  $m$  dans  $\mathcal{R}'$ .

$$\begin{cases} m\ddot{r} = m\omega^2 r \\ 0 = -2m\omega\dot{r} + N_\theta \\ 0 = -mg + N_z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$$

La solution générale s'écrit :

$$r(t) = A \operatorname{ch}(\omega t) + B \operatorname{sh}(\omega t)$$

Avec les conditions initiales :

$$r(0) = a = A \quad \text{et} \quad \dot{r}(0) = 0 = \omega B \Rightarrow \boxed{r(t) = a \operatorname{ch}(\omega t)}$$

- 4) En déduire l'expression de la réaction qu'exerce la tige sur l'anneau.

**Correction**

Avec les résultats de la question précédente, on a immédiatement que :

$$\boxed{\vec{N} = 2m\omega\dot{r} \vec{u}_\theta + mg\vec{u}_z = 2m\omega^2 a \operatorname{sh}(\omega t) \vec{u}_\theta + mg\vec{u}_z}$$

- 5) Retrouver l'équation du mouvement en écrivant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire supposé galiléen.

**Correction**

On rappelle l'accélération en coordonnées polaires pour une rotation à vitesse angu-

laire uniforme (ie.  $\omega = cte$ ) :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\omega \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{a} = [\ddot{r} - r\omega^2] \vec{u}_r + 2r\omega \vec{u}_\theta$$

On applique le PFD à l'anneau de masse  $m$  dans  $\mathcal{R}$  galiléen. Les seules forces qui s'appliquent sont le poids et la réaction normale du support.

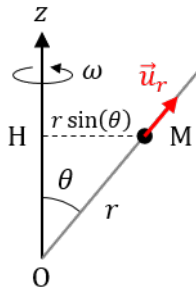
$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\omega^2 = 0 \\ 2m\omega\dot{r} = N_\theta \\ 0 = -mg + N_z \end{cases} \Rightarrow \boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$$

On retrouve bien les mêmes équations !

6) Maintenant, la tige fait un angle  $\theta$  avec la verticale. Déterminer la nouvelle équation du mouvement.

#### Correction

On se place en coordonnées sphériques. La tige est orientée selon l'axe  $\vec{u}_r$  et son accélération vaut :  $\vec{a} = \ddot{r} \vec{u}_r$ .



On détermine la projection des forces selon  $\vec{u}_r$ .

$$\begin{cases} \vec{P} \cdot \vec{u}_r = -mg \cos(\theta) \\ \vec{N} \cdot \vec{u}_r = 0 \\ \vec{F}_{ie} \cdot \vec{u}_r = m\omega^2 \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u}_r = m\omega^2 r \sin^2(\theta) \\ \vec{F}_{ic} \cdot \vec{u}_r = [-2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}] \cdot \vec{u}_r = 0 \quad \text{car : } \vec{v} \propto \vec{u}_\theta \end{cases}$$

On applique le PFD à l'anneau de masse  $m$  dans  $\mathcal{R}'$ , projeté selon  $\vec{u}_r$ .

$$m\ddot{r} = -mg \cos(\theta) + m\omega^2 r \sin^2(\theta) \Rightarrow \boxed{\ddot{r} + g \cos(\theta) - \omega^2 r \sin^2(\theta) = 0}$$

7) Montrer qu'il existe une position d'équilibre (deux méthodes à faire : via l'équation du mouvement et via une méthode énergétique). Déterminer si cette dernière est stable ou instable.

#### Correction

La position d'équilibre vérifie l'équation :

$$g \cos(\theta) - \omega^2 r_{eq} \sin^2(\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{r_{eq} = \frac{g}{\omega^2 \tan(\theta) \sin(\theta)}}$$

Pour la méthode énergétique, il faut déterminer l'énergie potentielle du système.  $\vec{F}_{ic}$  et  $\vec{N}$  ne travaillent pas (force perpendiculaire au mouvement).

Énergie potentielle de pesanteur :

$$\mathcal{E}_{pp} = mgz = mgr \cos(\theta)$$

Énergie potentielle de la force d'inertie d'entraînement :

$$\mathcal{E}_{pi} = -\frac{1}{2}m\omega^2 \overrightarrow{HM}^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \sin^2(\theta)$$

On en déduit l'énergie potentielle totale :

$$\mathcal{E}_p = mgr \cos(\theta) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \sin^2(\theta)$$

Cette fonction possède un maximum (donc un **équilibre instable**) car il s'agit d'une parabole dont la concavité est tournée vers le bas. Ce maximum a lieu pour :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = 0 = mg \cos(\theta) - m\omega^2 r_{eq} \sin^2(\theta) \Rightarrow \boxed{r_{eq} = \frac{g}{\omega^2 \tan(\theta) \sin(\theta)}}$$