

SPHÈRE CHARGÉE EN ROTATION

On considère une sphère de centre O , de rayon R , uniformément chargée en surface avec une densité surfacique de charge σ et tournant sur elle-même autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω .

On utilise les coordonnées sphériques.

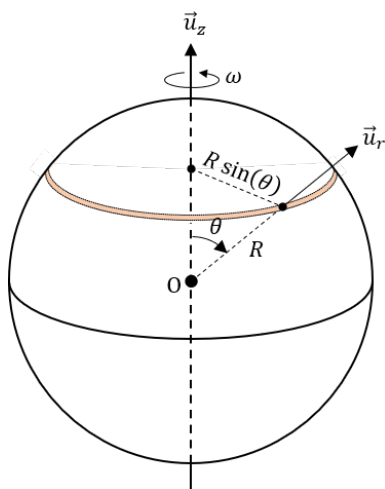
Formulaire :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{\cos^3(x)}{3} - \cos(x) \right] = \sin^3(x)$$

1) Quelle est l'expression de la charge portée par la couronne définie par $[\theta, \theta + d\theta]$ et $\varphi = [0, 2\pi[$.

Correction

Schéma :



On rappelle l'expression du déplacement élémentaire en sphérique :

$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$

L'élément de surface sur la surface de la sphère ($r = R$) est donc donné par :

$$d^2S = +Rd\theta \times R \sin(\theta) d\varphi = R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi$$

Pour avoir la surface de la couronne élémentaire, il faut intégrer par rapport à φ .

$$dS = R^2 \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2 \sin(\theta) d\theta$$

On en déduit la charge portée par cette couronne :

$$dq = \sigma dS = 2\pi R^2 \sigma \sin(\theta) d\theta$$

2) On assimile cette couronne à une spire. Quelle est l'intensité associée? Déterminer alors le moment dipolaire de cette spire.

Correction

L'intensité est définie comme la charge portée par la spire, divisée par le temps nécessaire pour cette charge à faire une révolution complète. Ainsi :

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq}{2\pi/\omega} = R^2 \sigma \omega \sin(\theta) d\theta$$

Le moment dipolaire d'une spire est égal au produit de l'intensité par la surface de la spire, et orienté dans le sens de la main droite. Or, une couronne d'angle θ possède un rayon qui vaut $R \sin(\theta)$ et donc une surface qui vaut $\pi R^2 \sin^2(\theta)$

$$d\vec{\mu} = dI \times \pi R^2 \sin^2(\theta) \vec{u}_z = \pi R^4 \sigma \omega \sin^3(\theta) d\theta \vec{u}_z$$

3) Déterminer le moment dipolaire de la sphère.

Correction

Le moment total est donné par l'intégral du moment élémentaire sur toutes les spires.

$$\vec{\mu} = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} d\vec{\mu} = \pi R^4 \sigma \omega \int_0^\pi \sin^3(\theta) d\theta \vec{u}_z$$

Avec l'aide du formulaire, qui nous donne la primitive de $\sin^3(\theta)$, on obtient :

$$\vec{\mu} = \frac{4\pi}{3} R^4 \sigma \omega \vec{u}_z$$